

I

(1)

C は中心が $(0, 0)$ 、半径が 2 の円であり、 C_t は中心が (t, t) 、半径が $\sqrt{(t-0)^2+(t-0)^2} = \sqrt{2}t$ の円である。よって、求める条件は、

$$|\sqrt{2}t - 2| < \sqrt{2}t < \sqrt{2}t + 2$$

となるが、 $\sqrt{2}t < \sqrt{2}t + 2$ は明らかに成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} |\sqrt{2}t - 2| &< \sqrt{2}t \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2}t &< \sqrt{2}t - 2 < \sqrt{2}t \\ \therefore t &> \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)

円 C の方程式は、 $x^2 + y^2 = 4$ であり、 C_t の半径は $\sqrt{2}t$ であるから、 C_t の方程式は

$(x-t)^2 + (y-t)^2 = 2t^2$ である。 C と C_t が 2 点を共有するとき、実数 k を用いて、

$k(x^2 + y^2 - 4) + \{(x-t)^2 + (y-t)^2 - 2t^2\} = 0$ を考えると、この式は C と C_t の 2 つの共有点を通る円または直線を表す。この式が直線を表すのは $k = -1$ のときであるから、直線の方程式は、

$$\begin{aligned} -(x^2 + y^2 - 4) + \{(x-t)^2 + (y-t)^2 - 2t^2\} &= 0 \\ \Leftrightarrow tx + ty - 2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad tx + ty - 2 = 0$$

(3)

$$\begin{aligned} tx + ty - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -x + \frac{2}{t} \end{aligned}$$

を C の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-x + \frac{2}{t}\right)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{t}x + \left(\frac{2}{t^2} - 2\right) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{t} \pm \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}} \end{aligned}$$

となる。求めるものは x 座標が大きいほうであるから、 $x = \frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}$ である。このとき、

$$\begin{aligned} y &= -\left(\frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}\right) + \frac{2}{t} \\ &= \frac{1}{t} - \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}, \frac{1}{t} - \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}\right)$$

(4)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_tP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO_t} \\ &= \left(\frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}, \frac{1}{t} - \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}\right) - (t, t) \\ &= \left(\frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}} - t, \frac{1}{t} - \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}} - t\right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{O_tP} &= \left(\frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}, \frac{1}{t} - \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}} - t, \frac{1}{t} - \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}} - t\right) \\ &= \left(\frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}\right)^2 - t\left(\frac{1}{t} + \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}\right) + \left(\frac{1}{t} - \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}\right)^2 - t\left(\frac{1}{t} - \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 2\left(2 - \frac{1}{t^2}\right) - 2 \cdot t \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2$$

II

[解答]

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{k}{n}, s_x^2 = \frac{k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

(2)

条件より, $(1, 1)$ が a 個, $(1, 0)$ が b 個, $(0, 1)$ が c 個, $(0, 0)$ が d 個であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= a(1 \cdot 1) + b(1 \cdot 0) + c(0 \cdot 1) + d(0 \cdot 0) \\ &= a \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{a}{n} - \frac{1 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d}{n} \cdot \frac{1 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c + 0 \cdot d}{n} \\ &= \frac{a}{n} - \frac{(a+b)(a+c)}{n^2} \\ &= \frac{na - (a+b)(a+c)}{n^2} \\ &= \frac{(a+b+c+d)a - (a+b)(a+c)}{n^2} \\ &= \frac{ad - bc}{n^2} \end{aligned}$$

である。よって, $T = ad - bc$ である。

(答) $T = ad - bc$

(3)

$a+b+c+d=100$ かつ, a, b, c, d はそれぞれ 0 以上 100 以下の整数である。よって, $b=c=0$ のときに T は最大となる。このとき,

$$\begin{aligned} T &= \frac{ad}{100^2} \\ &= \frac{a(100-a)}{100^2} \\ &= \frac{-(a-50)^2 + 2500}{100^2} \end{aligned}$$

であるから, $a=50, b=0, c=0, d=50$ のときに s_{xy} は最大となる。

(答) $a=50, b=0, c=0, d=50$

(4)

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{a \cdot 1^2 + b \cdot 1^2 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0^2}{n} - \left(\frac{a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d \cdot 0}{n} \right)^2 \\ &= \frac{a+b}{n} - \left(\frac{a+b}{n} \right)^2 \\ &= \frac{(a+b)\{n-(a+b)\}}{n^2} \\ &= \frac{(a+b)(c+d)}{n^2} \quad (\because a+b+c+d=n) \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\bar{y})^2 \\ &= \frac{a \cdot 1^2 + b \cdot 0^2 + c \cdot 1^2 + d \cdot 0^2}{n} - \left(\frac{a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d \cdot 0}{n} \right)^2 \\ &= \frac{a+c}{n} - \left(\frac{a+c}{n} \right)^2 \\ &= \frac{(a+c)\{n-(a+c)\}}{n^2} \\ &= \frac{(a+c)(b+d)}{n^2} \quad (\because a+b+c+d=n) \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} r &= \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \\ &= \frac{\frac{ad-bc}{n^2}}{\sqrt{\frac{(a+b)(c+d)}{n^2}} \cdot \sqrt{\frac{(a+c)(b+d)}{n^2}}} \\ &= \frac{\frac{ad-bc}{n^2}}{\frac{\sqrt{(a+b)(c+d)}}{n} \cdot \frac{\sqrt{(a+c)(b+d)}}{n}} \\ &= \frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

Ⅲ

[解答]

(1) $f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a$, 極大値は $3a-1$, 極小値は $-a^3 + 3a^2$

(2)

(1)より, 極大値と極小値の差が8となるとき,

$$3a-1-(-a^3+3a^2)=8$$

$$\Leftrightarrow a^3-3a^2+3a-9=0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-3)+3(a-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(a^2+3)=0$$

である。 $a^2+3>0$ であるから, $a=3$ となる。

(答) $a=3$

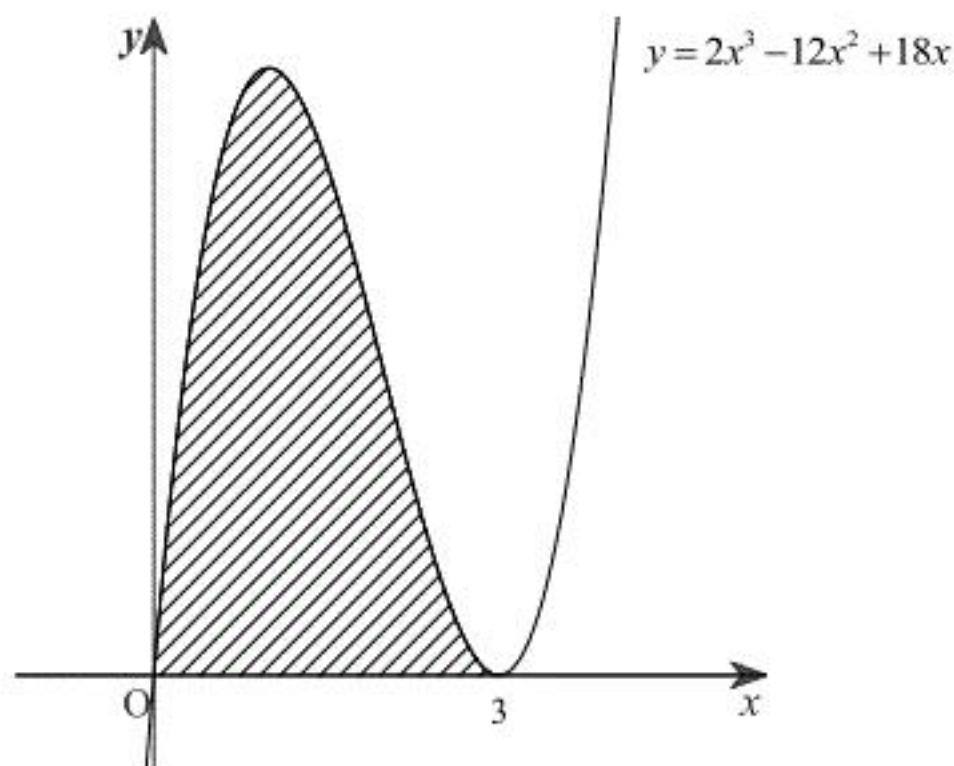
(3)

$a=3$ のとき,

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$$

$$= 2x(x-3)^2$$

である。したがって, 求める部分は以下の斜線部で囲まれた領域である。



上図より,

$$S = \int_0^3 (2x^3 - 12x^2 + 18x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 9x^2 \right]_0^3$$

$$= \frac{27}{2}$$

である。

(答) $\frac{27}{2}$