

I

〔解答〕

$$(1) \quad b_1 = 1, b_2 = \frac{3}{2}, b_3 = \frac{5}{3}$$

(2)

与えられた漸化式の両辺を $(n+1)!$ で割ると,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{(n+1)a_n}{(n+1)!} + \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{n(n+1)} \\ \therefore b_{n+1} &= b_n + \frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)}$$

(3)

(2)の結果から, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ \Leftrightarrow b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ \Leftrightarrow b_n &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ \therefore b_n &= 2 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

となる。この式は, $n=1$ のときにも成り立つ。また, b_n の定義から,

$$\begin{aligned}a_n &= b_n \cdot n! \\ &= \left(2 - \frac{1}{n} \right) \cdot n! \\ &= \frac{2n-1}{n} \cdot n! \\ &= (2n-1)(n-1)!\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = 2 - \frac{1}{n}, a_n = (2n-1)(n-1)!$$

(4)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_k &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} (2k-1)(k-1)! \\ &= \sum_{k=1}^n \{ 2^k k! - 2^{k-1} (k-1)! \} \\ &= 2^n n! - 1\end{aligned}$$

となり, 題意が示された。

(証明終)

II

(1)

直線 $y = mx + n$ が円 C に接するとき、円 C の中心 $(0, 2)$ と直線 $y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0$ の距離は円 C の半径に一致するから、

$$\begin{aligned}\frac{|m \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |n - 2| &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 + 1} \\ \Leftrightarrow (n - 2)^2 &= 2m^2 + 2\end{aligned}$$

が成り立つ。

(答) $(n - 2)^2 = 2m^2 + 2$

(2)

$y = -\sqrt{2}x + n$ が円 C に接するとき、(1)の結果に $m = -\sqrt{2}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}(n - 2)^2 &= 2m^2 + 2 \\ \Leftrightarrow (n - 2)^2 &= 2(-\sqrt{2})^2 + 2 \\ \Leftrightarrow (n - 2)^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow n &= 2 \pm \sqrt{6}\end{aligned}$$

となる。また、直線 $y = -\sqrt{2}x + n$ が点 $(1, 3)$ を通るとき、

$$\begin{aligned}3 &= -\sqrt{2} \cdot 1 + n \\ \Leftrightarrow n &= 3 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$2 + \sqrt{6} - (3 + \sqrt{2}) = \sqrt{6} - (\sqrt{2} + 1)$$

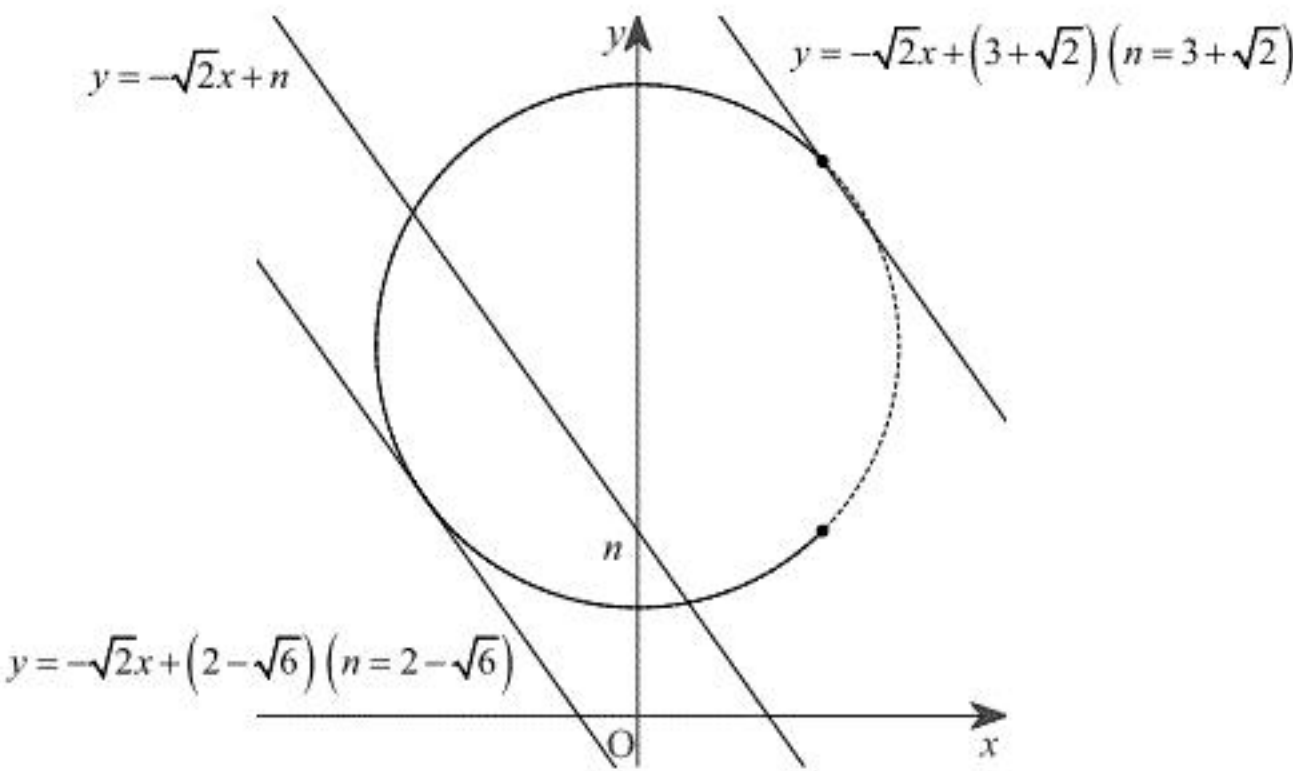
であり、

$$\begin{aligned}(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2} + 1)^2 &= 6 - (3 + 2\sqrt{2}) \\ &= 3 - 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{9} - \sqrt{8} \\ &> 0\end{aligned}$$

であるから、 $3 + \sqrt{2} < 2 + \sqrt{6}$ が成り立つ。つまり、直線 $y = -\sqrt{2}x + (2 + \sqrt{6})$ は直線

$y = -\sqrt{2}x + (3 + \sqrt{2})$ よりも上側にあるから、 $y = -\sqrt{2}x + (2 + \sqrt{6})$ と円 C の接点は C_1 上にな

い。よって、 C_1 と $y = -\sqrt{2}x + n$ の位置関係は下図のようになる。



よって、求める n の範囲は、 $2 - \sqrt{6} \leq n \leq 3 + \sqrt{2}$ となる。

(答) $2 - \sqrt{6} \leq n \leq 3 + \sqrt{2}$

(3)

$$\begin{aligned}y &= mx + 3m + 1 \\ \Leftrightarrow y &= m(x + 3) + 1\end{aligned}$$

となるから、直線 $y = mx + 3m + 1$ は、定点 $(-3, 1)$ を通る、傾きが m の直線である。また、直線 $y = mx + 3m + 1$ が円 C に接するとき、(1)の結果に $n = 3m + 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\{(3m + 1) - 2\}^2 &= 2m^2 + 2 \\ \Leftrightarrow (3m - 1)^2 &= 2m^2 + 2 \\ \Leftrightarrow 7m^2 - 6m - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (7m + 1)(m - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= -\frac{1}{7}, 1\end{aligned}$$

となる。さらに、直線 $y = mx + 3m + 1$ が点 $(1, 1)$ を通るとき、

$$\begin{aligned}1 &= m \cdot 1 + 3m + 1 \\ \Leftrightarrow 4m &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= 0\end{aligned}$$

となり、直線 $y = mx + 3m + 1$ が点 $(1, 3)$ を通るとき、

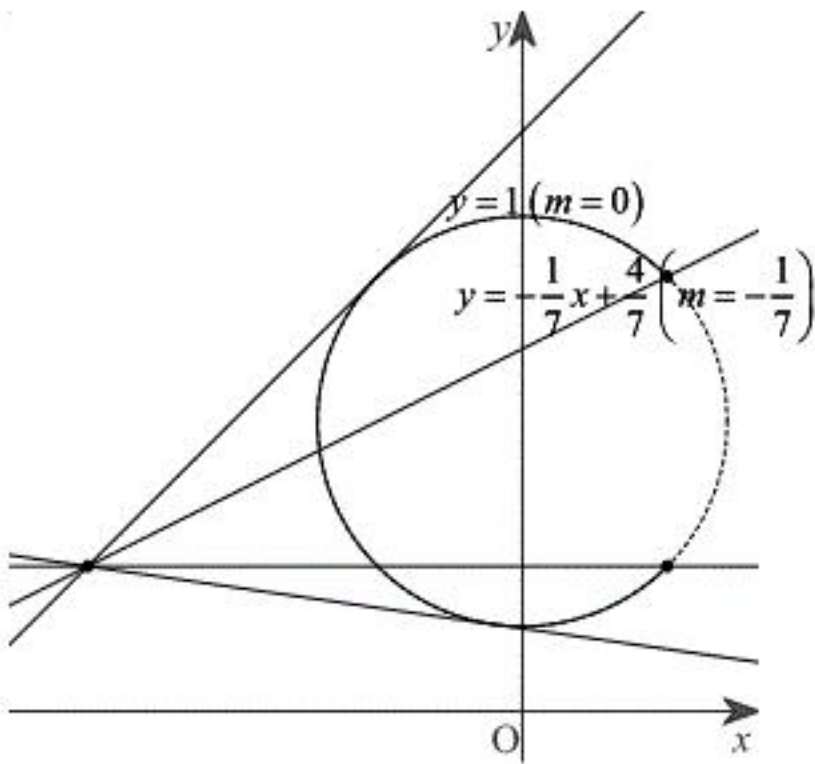
$$\begin{aligned}3 &= m \cdot 1 + 3m + 1 \\ \Leftrightarrow 4m &= 2 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$y = x + 4 \quad (m = 1)$$

となる。以上より、 $m = -\frac{1}{7}, 0, \frac{1}{2}, 1$ のときの直線 $y = mx + 3m + 1$ と C_1 の位置関係は下図のようになる。

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \left(m = \frac{1}{2}\right)$$

$(-3, 1)$



よって、直線 $y = mx + 3m + 1$ と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつような m の値の範囲は、

$$-\frac{1}{7} < m \leq 0, \frac{1}{2} \leq m < 1 \text{ となる。}$$

(答) $-\frac{1}{7} < m \leq 0, \frac{1}{2} \leq m < 1$

Ⅲ

(1)

$f(x) = x^3 - ax + 1$ とする。 $f'(x) = 3x^2 - a$ であるから、 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - a)(x - t) - (t^3 - at + 1) \\ \Leftrightarrow y &= (3t^2 - a)x - 2t^3 + 1 \end{aligned}$$

となる。この式と $y = x^3 - ax + 1$ から y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^3 - ax + 1 &= (3t^2 - a)x - 2t^3 + 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3t^2x + 2t^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - t)^2(x + 2t) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = t, -2t \end{aligned}$$

となる。よって、点 P の x 座標は t であるから、点 Q の x 座標は $-2t$ となる。

(答) $-2t$

(2)

点 Q における接線と ℓ が直交するとき、これら 2 直線の傾きの積は -1 となるから、

$$\begin{aligned} f'(-2t) \cdot f'(t) &= -1 \\ \Leftrightarrow \{3(-2t)^2 - a\}(3t^2 - a) &= -1 \\ \Leftrightarrow (12t^2 - a)(3t^2 - a) &= -1 \\ \Leftrightarrow 36t^4 - 15at^2 + a^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(答) $36t^4 - 15at^2 + a^2 + 1 = 0$

(3)

$t^2 = s$ とおくと、(2) の方程式は、 $36s^2 - 15as + (a^2 + 1) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$ となる。 t が実数の

とき、 $s = t^2 \geq 0$ であるから、(2) の方程式が実数解をもつための条件は、 $\textcircled{1}$ が $s \geq 0$ の範囲に解を少なくとも 1 つもつことである。よって、 $\textcircled{1}$ の左辺を $g(s)$ とすると、 $g(0) = 1 + a^2$ であることから、求める a の条件は、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{15}{2 \cdot 36} a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (-15a)^2 - 4 \cdot 36(a^2 + 1) \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 \geq \frac{16}{9} \\ a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a \leq -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \leq a \\ a > 0 \end{cases} \\ \therefore &\frac{4}{3} \leq a \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3} \leq a$