

I

(1)

整式 P について、 $P(x)$ と表す。条件より、整式 R を用いて、 $P(x) = (x-2)^3 R + x^2 + x + 1$ と表せる。この式の両辺に $x=2$ を代入すると、

$$P(2) = (2-2)^3 R + 2^2 + 2 + 1$$

$$\therefore P(2) = 7$$

とわかる。よって、 P を $x-2$ で割った余りは 7 である。また、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)^3 R + x^2 + x + 1 \\ &= (x-2)^3 R + (x-2)^2 + 5x - 3 \\ &= (x-2)^2 \{(x-2)R + 1\} + 5x - 3 \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 P を $(x-2)^2$ で割った余りは $5x-3$ である。

(答) P を $x-2$ で割った余り : 7 , P を $(x-2)^2$ で割った余り : $5x-3$

(2)

整式 Q を $Q(x)$ と表すと、剰余の定理より、 $Q(1)=3$, $Q(2)=5$ である。また、 Q を $(x-1)(x-2)$ で割った余りを実数 a, b を用いて $ax+b$ とおくと、整式 $S(x)$ を用いて、 $Q(x) = (x-1)(x-2)S(x) + ax + b$ と表せる。この式に $Q(1)=3$, $Q(2)=5$ を代入すると、

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=5 \end{cases}$$
$$\therefore a=2, b=1$$

となる。したがって、 Q を $(x-1)(x-2)$ で割った余りは $2x+1$ である。

(答) $2x+1$

II

実数 a について、接点の x 座標を $x=a$ とすると、接点は (a, a^3-3a^2-1) と表せる。

$y' = 3x^2 - 6x$ であるから、接線の方程式は、

$$\begin{aligned}y - (a^3 - 3a^2 - 1) &= (3a^2 - 6a)(x - a) \\ \therefore y &= (3a^2 - 6a)x - 2a^3 + 3a^2 - 1\end{aligned}$$

と表される。この直線が原点を通るとき、

$$\begin{aligned}0 &= (3a^2 - 6a) \cdot 0 - 2a^3 + 3a^2 - 1 \\ \therefore 2a^3 - 3a^2 + 1 &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。この方程式の実数解を求めると、

$$\begin{aligned}2a^3 - 3a^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(2a^2 - a - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1) &= 0 \\ \therefore a &= 1, -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

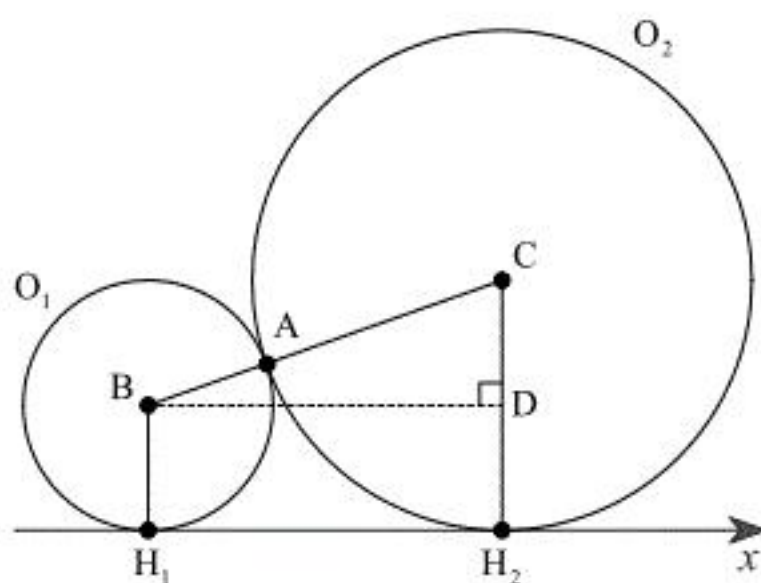
となる。よって、 $a=1$ のとき、接線の方程式は $y=-3x$ であり、接点の座標は $(1, -3)$ である。また、 $a=-\frac{1}{2}$ のとき、接線の方程式は $y=\frac{15}{4}x$ であり、接点の座標は $(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{8})$ である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{15}{4}x, \text{ 接点の座標: } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{8}\right), \quad y = -3x, \text{ 接点の座標: } (1, -3)$$

Ⅲ

(1)

点 B, C, D を以下のように定め、条件を図示すると下図のようになる。



$\triangle BCD$ について三平方の定理より,

$$\begin{aligned} CD^2 + BD^2 &= BC^2 \\ \Leftrightarrow (CH_2 - DH_2)^2 + BD^2 &= (BA + AC)^2 \\ \Leftrightarrow (CH_2 - BH_2)^2 + BD^2 &= (BA + AC)^2 \\ \Leftrightarrow (CH_2 - DH_2)^2 + BD^2 &= (BA + AC)^2 \\ \Leftrightarrow (2 - 1)^2 + BD^2 &= (1 + 2)^2 \\ \Leftrightarrow BD^2 &= 8 \\ \therefore BD &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。また、四角形 BDH_2H_1 は長方形であるから、 $BD = H_1H_2$ である。したがって、 $H_1H_2 = 2\sqrt{2}$ である。

(答) $H_1H_2 = 2\sqrt{2}$

(2)

$$\begin{aligned} \cos \angle BCD &= \frac{CD}{BC} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle ACH_2$ について余弦定理より,

$$\begin{aligned} AH_2^2 &= AC^2 + H_2C^2 - 2 \cdot AC \cdot H_2C \cdot \cos \angle BCD \\ &= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{16}{3} \\ \therefore AH_2 &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $AH_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

IV

(1)

a, a のみが隣り合う場合を考える。このとき、 a, a を一つの文字 a' として考えると、求める場合の数は、 a', c の並びの左側、間、右側の計 3 つの場所に 2 つの b を配置する場合の数に等しいから、 a', c の並べ方は 2 通りあることに注意すると、その場合の数は、

$$2 \cdot {}_3C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。 b, b が隣り合う場合の数も同様に 6 通りである。また、 a, a, b, b, c を並べる場合の数は、

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 30 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{6+6}{30} = \frac{2}{5}$$

である。

(答) $\frac{2}{5}$

(2)

二種類の文字が隣り合う場合を考える。 a, a を一つの文字 a' b, b を一つの文字 b' として考えると、求める場合の数は、 a', b', c の順列の数となる。よって、その確率は、

$$\frac{3!}{30} = \frac{1}{5}$$

である。(同じ文字が隣り合わない確率) $= 1 - (\text{同じ文字が隣り合うのが、一種類の文字である確率}) - (\text{同じ文字が隣り合うのが、二種類の文字である確率})$ が成り立つから、求める確率は、

$$1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

である。

(答) $\frac{2}{5}$