

I

〔解答〕

(1)	13 個
(2)	$2x+1$
(3)	$\frac{1}{2}$
(4)	$P_B(A) = \frac{3}{7}$
(5)	$-\frac{9}{8}$

II

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} &= (1-m)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} \\
 &= (1-m)(1, 2, -1) + m(-2, 0, 1) \\
 &= (-3m+1, -2m+2, 2m-1) \\
 \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ} \\
 &= (1, 1, -1) + t(1, 0, -1) \\
 &= (t+1, 1, -t-1) \\
 \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\
 &= (t+1, 1, -t-1) - (-3m+1, -2m+2, 2m-1) \\
 &= (3m+t, 2m-1, -2m-t)
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{PQ}|^2 &= (3m+t)^2 + (2m-1)^2 + (-2m-t)^2 \\
 &= 9m^2 + 6mt + t^2 + 4m^2 - 4m + 1 + 4m^2 + 4mt + t^2 \\
 &= 2t^2 + 10mt + 17m^2 - 4m + 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad |\overrightarrow{PQ}|^2 = 2t^2 + 10mt + 17m^2 - 4m + 1$$

(2)

(1)より,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = 2\left(t + \frac{5}{2}m\right)^2 + \frac{9}{2}m^2 - 4m + 1$$

である。 t はすべての実数値をとるから、 $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は $t = -\frac{5}{2}m$ のとき最小値 $\frac{9}{2}m^2 - 4m + 1$ をとる。

$$(答) \quad \frac{9}{2}m^2 - 4m + 1$$

(3)

$$\frac{9}{2}m^2 - 4m + 1 = \frac{9}{2}\left(m - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{1}{9}$$

であるから、 $\frac{9}{2}m^2 - 4m + 1$ は $m = \frac{4}{9}$ のとき最小値 $\frac{1}{9}$ をとる。このことと(2)より、 $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は

$m = \frac{4}{9}, t = -\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{9} = -\frac{10}{9}$ のときに最小値 $\frac{1}{9}$ をとる。このとき,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PQ} &= \left(3 \cdot \frac{4}{9} - \frac{10}{9}, 2 \cdot \frac{4}{9} - 1, -2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{10}{9}\right) \\
 &= \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)
 \end{aligned}$$

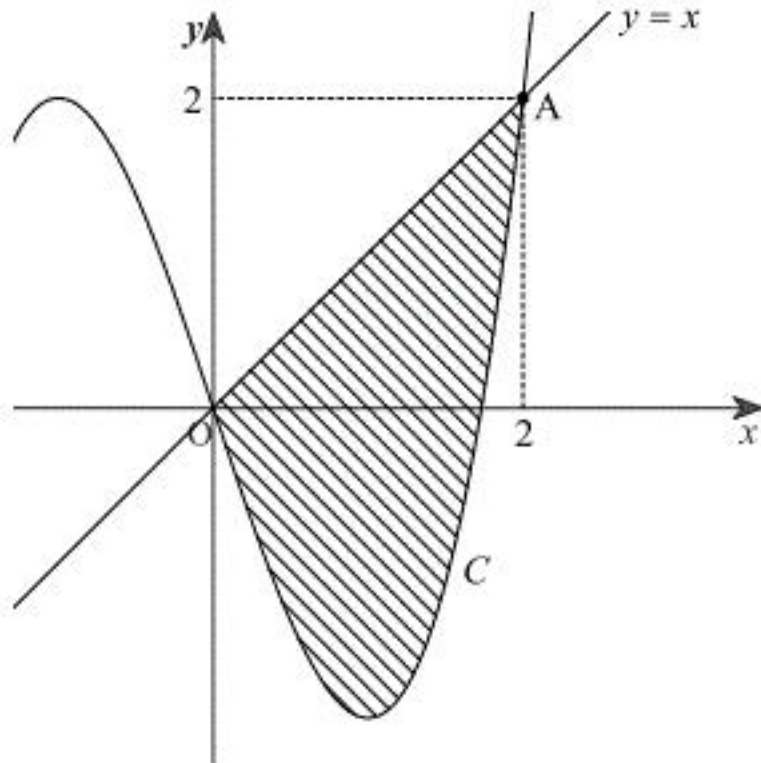
であり、 $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{3}$ である。

$$(答) \quad \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{3}$$

Ⅲ

(1)

曲線 C と線分 OA で囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



よって、求める面積は

$$\int_0^2 \left\{ x - (x^3 - 3x) \right\} dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 = 4$$

である。

(答) 4

(2)

$y = x^3 - 3x$ を x で微分すると、 $y = 3x^2 - 3$ である。よって、点 $P(t, t^3 - 3t)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t) \\ \Leftrightarrow y = 3(t^2 - 1)x - 2t^3$$

である。また、点 P は原点 O と点 A の間にあるから、 $0 < t < 2$ である。この接線が線分 OA と平行であるとき、

$$3(t^2 - 1) = 1 \\ \Leftrightarrow t^2 = \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0 < t < 2)$$

である。

(答) $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3)

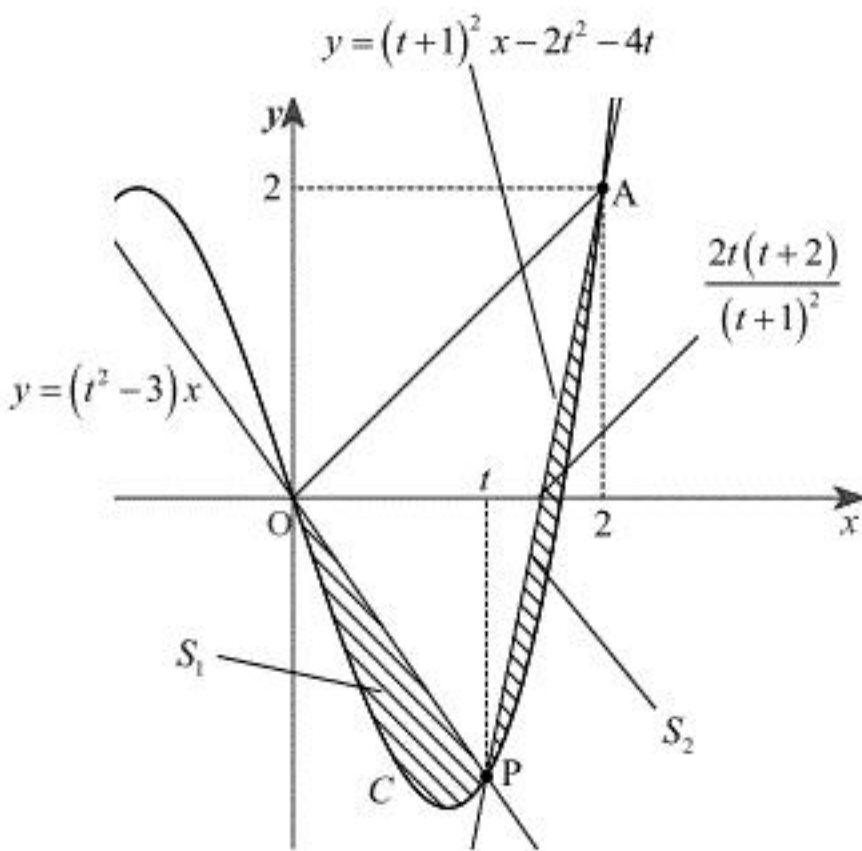
直線 OP の方程式は

$$y = \frac{t^3 - 3t}{t}x \\ \Leftrightarrow y = (t^2 - 3)x$$

であり、直線 PA の方程式は

$$y - 2 = \frac{2 - (t^3 - 3t)}{2 - t}(x - 2) \\ \Leftrightarrow y = (t + 1)^2 x - 2t^2 - 4t$$

である。また、直線 PA と x 軸の交点は $\left(\frac{2t(t+2)}{(t+1)^2}, 0 \right)$ である。よって、曲線 C と線分 OP で囲まれた図形、曲線 C と線分 PA で囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



よって、 $S = S_1 + S_2$ であるから、 S は(1)で求めた面積から $\triangle OAP$ の面積を引くことで求められる。よって、

$$S = 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t(t+2)}{(t+1)^2} \cdot \{2 - (t^3 - 3t)\} \\ = 4 - \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} (t+1)^2 (2-t) \\ = 4 - t(4-t^2) \\ = t^3 - 4t + 4$$

となる。ここで、 $f(t) = t^3 - 4t + 4$ とおくと、

$$f'(t) = 3t^2 - 4$$

であるから、 $0 < t < 2$ における $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	2
$f'(t)$	$\times$	-	0	+	$\times$
$f(t)$	$\times$	$\searrow$	$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\nearrow$	$\times$

したがって、 $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき、 $f(t)$ は最小値をとる。

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4 \\ = \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3} + 4 \\ = 4 - \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

であるから、 $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき、 S は最小値 $4 - \frac{16\sqrt{3}}{9}$ をとる。

(答) $4 - \frac{16\sqrt{3}}{9}$