

I

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
d	h	b	k	p

II

〔解答〕

カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
p	p	f	e	h	d	j

Ⅲ

(1)

$a_n = 5b_n + r_n$ と表されるから、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2(5b_n + r_n)^2 + 1 \\ &= 50b_n^2 + 20b_nr_n + 2r_n^2 + 1 \\ &= 5(10b_n^2 + 4b_nr_n) + 2r_n^2 + 1 \\ &\equiv 2r_n^2 + 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $r_{n+1} \equiv 2r_n^2 + 1 \pmod{5}$ である。 $a_1 = 8$ より $r_1 = 3$ であり、

$2 \cdot 3^2 + 1 = 19 \equiv 4 \pmod{5}$ であるから $r_2 = 4$ となる。また、 $2 \cdot 4^2 + 1 = 33 \equiv 3 \pmod{5}$ より $r_3 = 3$ となる。ここから、自然数 m に対して $r_{2m-1} = 3, r_{2m} = 4$ であることが推測できる。これを数学的帰納法で示す。

[1] $m=1$ のとき

$r_1 = 3, r_2 = 4$ より成立する。

[2] $m=k$ (k は自然数) のとき、 $r_{2k-1} = 3, r_{2k} = 4$ が成り立つと仮定する。

$m=k+1$ のときを考えると、仮定より、合同式の法を 5 として

$$\begin{aligned} r_{2(k+1)-1} &\equiv 2r_{2k}^2 + 1 \\ &= 2 \cdot 4^2 + 1 \\ &\equiv 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{2(k+1)} &\equiv 2r_{2(k+1)-1}^2 + 1 \\ &= 2 \cdot 3^2 + 1 \\ &\equiv 4 \end{aligned}$$

となるため、 $m=k+1$ のときも成り立つ。

以上、[1], [2] より、自然数 m に対して $r_{2m-1} = 3, r_{2m} = 4$ であることが示された。よって、

$$r_n = \begin{cases} 3 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 4 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

(2)

(1) より、自然数 m に対して

$$\begin{aligned} a_{2m} &= 5(10b_{2m-1}^2 + 4b_{2m-1}r_{2m-1}) + 2r_{2m-1}^2 + 1 \\ &= 5(10b_{2m-1}^2 + 12b_{2m-1}) + 19 \\ &= 5(10b_{2m-1}^2 + 12b_{2m-1} + 3) + 4 \\ a_{2m+1} &= 5(10b_{2m}^2 + 4b_{2m}r_{2m}) + 2r_{2m}^2 + 1 \\ &= 5(10b_{2m}^2 + 16b_{2m}) + 33 \\ &= 5(10b_{2m}^2 + 16b_{2m} + 6) + 3 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} b_{2m} &= 10b_{2m-1}^2 + 12b_{2m-1} + 3 \\ &= 5(2b_{2m-1}^2 + 2b_{2m-1}) + 2b_{2m-1} + 3 \\ b_{2m+1} &= 10b_{2m}^2 + 16b_{2m} + 6 \\ &= 5(2b_{2m}^2 + 3b_{2m} + 1) + b_{2m} + 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 b_n を 5 で割った商を p_n 、余りを q_n とおくと

$$\begin{aligned} b_{2m} &= 5(2b_{2m-1}^2 + 2b_{2m-1}) + 2(5p_{2m-1} + q_{2m-1}) + 3 \\ &= 5(2b_{2m-1}^2 + 2b_{2m-1} + 2p_{2m-1}) + 2q_{2m-1} + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= 5(2b_{2m}^2 + 3b_{2m} + 1) + 5p_{2m} + q_{2m} + 1 \\ &= 5(2b_{2m}^2 + 3b_{2m} + 1 + p_{2m}) + q_{2m} + 1 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} q_{2m} &\equiv 2q_{2m-1} + 3 \pmod{5} \\ q_{2m+1} &\equiv q_{2m} + 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $a_1 = 8$ より $b_1 = q_1 = 1$ となるから、合同式の法を 5 とすると

$$\begin{aligned} q_2 &\equiv 2 \cdot 1 + 3 \\ &\equiv 0 \\ q_3 &\equiv 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。ここから、自然数 m に対して $q_{2m-1} = 1, q_{2m} = 0$ であることが推測できる。これを数学的帰納法で示す。

[1] $m=1$ のとき

$q_1 = 1, q_2 = 0$ より成立する。

[2] $m=k$ (k は自然数) のとき、 $q_{2k-1} = 1, q_{2k} = 0$ が成り立つと仮定する。

$m=k+1$ のときを考えると、仮定より、合同式の法を 5 として

$$\begin{aligned} q_{2(k+1)-1} &\equiv q_{2k} + 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{2(k+1)} &\equiv 2q_{2(k+1)-1} + 3 \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

となるため、 $m=k+1$ のときも成り立つ。

以上、[1], [2] より、自然数 m に対して $q_{2m-1} = 1, q_{2m} = 0$ であることが示された。よって、求める余りは

$$\begin{cases} 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

(3)

(2) で定義した p_n, q_n を用いると、

$$\begin{aligned} a_n &= 5(5p_n + q_n) + r_n \\ &= 25p_n + 5q_n + r_n \end{aligned}$$

と表される。 a_n を 25 で割った余りは、(1), (2) の結果から

$$5q_n + r_n = \begin{cases} 8 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 4 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

となる。

[1] n が奇数のとき

a_n を 50 で割った余りは 8 もしくは 33 となる。ここで、 $a_{n+1} = 2a_n^2 + 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$) より、 $n \geq 2$ のとき a_n は奇数であり、 $a_1 = 8$ は偶数であるから、 $n=1$ のとき a_n を 50 で割った余りは 8 となり、 $n \geq 3$ のとき余りは 33 となる。

[2] n が偶数のとき

a_n を 50 で割った余りは 4 もしくは 29 となる。[1] と同様に考えると、 $n \geq 2$ のとき a_n は奇数であるから、この場合 a_n を 50 で割った余りは 29 となる。

以上、[1], [2] より、 a_n を 50 で割った余りは

$$\begin{cases} 8 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 33 & (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき}) \\ 29 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である。

(答) 前述

Ⅳ

(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

となるから、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

したがって、 $f(x)$ は $x=e$ のとき最大値 $f(e) = \frac{1}{e}$ をとる。

(答) $x=e$ のとき最大値 $\frac{1}{e}$

(2)

n は自然数であることより $a_n = \sqrt[n]{n} > 0$ であるから、 a_n が最大となるのは $\log a_n = \frac{\log n}{n}$ が最大となるときである。(1)と $2 < e < 3$ より、 $\log a_n$ が最大となるのは $n=2, 3$ のいずれかの場合である。ここで、 $a_2 = \sqrt{2}$ 、 $a_3 = \sqrt[3]{3}$ より $a_2^6 = 8$ 、 $a_3^6 = 9$ であるから、 $a_2 < a_3$ となる。したがって、 a_n は $n=3$ のとき最大値 $\sqrt[3]{3}$ をとる。また、 $\log n = t$ とおくと、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}} \\ &= 0 \left(\because \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{t} = \infty \right) \end{aligned}$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ となる。

(答) a_n の最大値 $\sqrt[3]{3}$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(3)

a, b は自然数であるから、

$$\begin{aligned} a^b &= b^a \\ \Leftrightarrow b \log a &= a \log b \\ \Leftrightarrow \frac{\log a}{a} &= \frac{\log b}{b} \\ \Leftrightarrow f(a) &= f(b) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 1$ のとき $f(x) > 0$ であるから、(1)の増減表と $f(1) = 0$ より、 $a^b = b^a$ が成り立つならば $1 < a < e$ 、すなわち $a=2$ が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{\log 4}{4} \\ &= \frac{2 \log 2}{4} \\ &= \frac{\log 2}{2} \\ &= f(2) \end{aligned}$$

が成り立ち、 $f(x)$ は $x \geq e$ で単調減少であるから、 $a^b = b^a$ が成り立つような組 (a, b) は

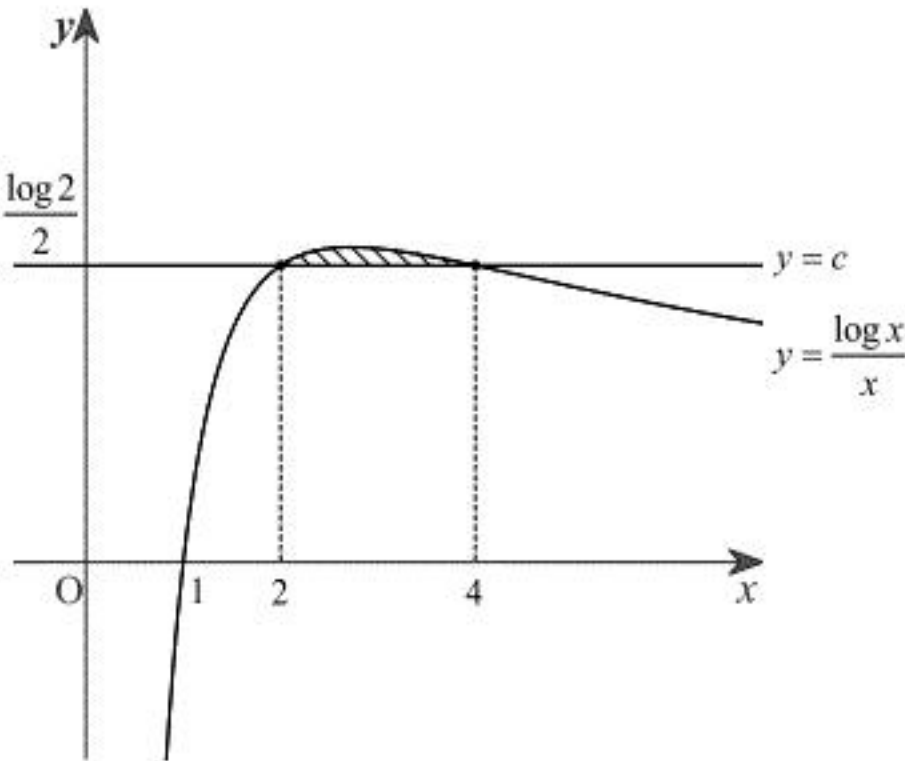
$$(a, b) = (2, 4)$$

である。

(答) $(a, b) = (2, 4)$

(4)

(3)より $c = \frac{\log 2}{2}$ である。(1)の増減表と $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ より、 $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフと直線 $y=c$ を図示すると次のようになる。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_2^4 \left(\frac{\log x}{x} - \frac{\log 2}{2} \right) dx &= \int_2^4 (\log x) \cdot (\log x)' dx - (4-2) \frac{\log 2}{2} \\ &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_2^4 - \log 2 \\ &= \frac{3}{2} (\log 2)^2 - \log 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3}{2} (\log 2)^2 - \log 2$