2025 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

（試験時間　13：35～15：15　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

2．問題は，Ⅰ～Ⅳの４題あります。そのうち３題を選択して解答してください。**選択した問題には解答用紙の設問番号の右側の選択欄に○を，選択しなかった問題には×を記入してください。（選択欄の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。）**

なお，**４題すべてに○を記入した場合は，数学の解答はすべて無効となります。**

（記入例）

Ⅰ	選　択	○

Ⅱ	選　択	×

3．解答は，**必ず解答欄の枠内に記入してください。**解答欄以外に記入した解答はすべて無効となります。特に，採点欄に解答を記入しないよう，注意してください。

4．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙を折り曲げたり，切り離したり，汚したりしないでください。

6．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。未記入や記入ミスがあった場合は，当該科目の解答は無効になります。

7．満点が 150 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 300 点であり，各問の配点は２倍となります。

（設問は２ページより始まる）

I　関数 $y=x^4-2x^3$ のグラフを C とし，実数 m に対し直線 $y=mx-m-1$ を l とする。さらに，C と l の共有点の個数を N とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) C の変曲点を求めよ。

(2) C と l が点 $(1,\ -1)$ で接するような m の値を求めよ。

(3) C と l が点 $(1,\ -1)$ とは異なる点で接するような m の値を求めよ。

(4) $N=4$ となる m の値の範囲を求めよ。

(5) $N=4$ のとき，C と l の共有点の x 座標を小さい順に a，b，c，d とする。m が $N=4$ となる範囲を動くとき，$a+b$ のとりうる値の範囲を求めよ。

（設問は次のページにつづく）

II　連続な関数 $f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ が，以下の不等式および 2 つの等式を満たすとする。

$$f(x) \geqq 0, \quad f(-x) = f(x), \quad \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 1$$

さらに，関数 $F(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ を，$F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ で定める。また，n を自然数とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) $-1 \leqq a \leqq b \leqq 1$ に対して，$F(a) \leqq F(b)$ を示せ。
さらに，$-1 \leqq x \leqq 1$ に対して，$0 \leqq F(x) - \{F(x)\}^2 \leqq \dfrac{1}{4}$ を示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{2n+1} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{2n} F(x)\,dx$ を求めよ。

(4) 次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_{-1}^{1} x^{2n} F(x)\,dx - \int_{-1}^{1} x^{2n} \{F(x)\}^2\,dx \leqq \frac{1}{2(2n+1)}$$

(5) 次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_{-1}^{1} x^{2n+1} f(x) F(x)\,dx \leqq \frac{1}{4}$$

（設問は次のページにつづく）

III 数列 $\{a_k\}$ および関数 $f_k(x)$ を，以下の①，②により定める。

$$a_0 = 1, \quad a_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1} {}_{k+1}\mathrm{C}_j\, a_j \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

$$f_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\, {}_k\mathrm{C}_j\, a_j\, x^{k-j} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

自然数 k に対して，以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ。

(2) $0 \leqq j \leqq k$ に対して $\dfrac{{}_k\mathrm{C}_j}{{}_{k+1}C_j}$ を求め，次の等式を示せ。

$$\frac{d}{dx}\{f_{k+1}(x) - f_{k+1}(x-1)\} = k\{f_k(x) - f_k(x-1)\}$$

(3) 等式 $f_{k+1}(0) - f_{k+1}(-1) = 0$ を示せ。

(4) 次の等式③を数学的帰納法によって示せ。ただし，$x^0 = 1$ とする。

$$x^{k-1} = f_k(x) - f_k(x-1) \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

(5) 自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4$ を n の多項式として表せ。

（設問は次のページにつづく）

IV　$f(x)$ は開区間 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ を定義域とする微分可能な関数で，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} < h < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} < x + h < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$f(x+h)\,(1 - f(x)f(h)) = f(x) + f(h)$$

を満たすとする。さらに，$f'(0) = 1$ とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) $f(0)$ の値を求めよ。また，等式 $f(-x) = -f(x)$ を示せ。

(2) 等式 $f'(x) = \{f(x)\}^2 + 1$ を示せ。

$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$f(x) = \tan\theta$ および $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすただ 1 つの θ の値を $\theta(x)$ とする。

(3) $\theta(x)$ の導関数 $\theta'(x)$ を求めよ。

(4) $\theta(x)$ および $f(x)$ を求めよ。

（以下計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）