2025 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　　学

（試験時間　15：20～17：00　　100 分）

1．解答用紙には，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類があります。

2．解答は，**必ず解答欄の枠内に記入もしくはマークしてください**。解答欄以外への記入およびマークはすべて無効となります。特に，記述解答用紙の採点欄に解答を記入しないよう，注意してください。

3．解答は，ＨＢの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，一度マークした箇所を修正する場合，しっかりと消してください。消し残りがあると，解答が無効となることがあります。また，消しくずを残さないでください。

4．解答用紙を折り曲げたり，切り離したり，汚したりしないでください。また，マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。

5．解答用紙には，必ず受験番号と氏名を記入・マークしてください。未記入や記入・マークミスなどがあった場合は，当該科目の解答は無効になります。

6．満点が 100 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 200 点であり，各問の配点は 2 倍となります。

（設問は２ページより始まる）

I　次の問題文の空欄に最も適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を 2 度以上用いてもよい。(20 点)

n を 3 以上の自然数とし，1 から n までの n 枚の番号札が 3 組ある。この $3n$ 枚の番号札をよくかき混ぜて，1 枚ずつ順番に 3 回引く。ただし引いた番号札は元に戻さないものとする。1 回目に引いた番号札の番号を X_1，2 回目に引いた番号札の番号を X_2，3 回目に引いた番号札の番号を X_3 とする。このとき $X_1 \leqq X_2 \leqq X_3$ となる確率を求めていこう。

(1) $X_1 = X_2 = X_3$ となる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $X_1 = X_2 < X_3$ となる確率は $\boxed{\text{イ}}$ であり，$X_1 < X_2 = X_3$ となる確率も同様に $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) 自然数 k（$2 \leqq k \leqq n-1$）に対して，$X_2 = k$ かつ $X_1 < X_2 < X_3$ となる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4) $X_1 < X_2 < X_3$ となる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(5) 以上より，$X_1 \leqq X_2 \leqq X_3$ となる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

問題Ⅰのア，イ，エ，オの解答群

ⓐ $\dfrac{1}{27n^3}$　ⓑ $\dfrac{1}{3(3n-1)(3n-2)}$　ⓒ $\dfrac{1}{(3n-1)(3n-2)}$

ⓓ $\dfrac{2}{(3n-1)(3n-2)}$　ⓔ $\dfrac{1}{3n(3n-1)(3n-2)}$　ⓕ $\dfrac{n-1}{(3n-1)(3n-2)}$

ⓖ $\dfrac{3(n-1)}{2(3n-1)(3n-2)}$　ⓗ $\dfrac{3(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}$　ⓘ $\dfrac{n(n-1)}{3(3n-1)(3n-2)}$

ⓙ $\dfrac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$　ⓚ $\dfrac{3(n-1)(n-2)}{2(3n-1)(3n-2)}$　ⓛ $\dfrac{3(n-1)(n-2)}{(3n-1)(3n-2)}$

ⓜ $\dfrac{6(n-1)(n-2)}{(3n-1)(3n-2)}$　ⓝ $\dfrac{2n^2-5n+1}{(3n-1)(3n-2)}$　ⓞ $\dfrac{9n^2+9n-16}{6(3n-1)(3n-2)}$

ⓟ $\dfrac{3n^2+3n-2}{2(3n-1)(3n-2)}$　ⓠ $\dfrac{3n^2+n-4}{3(3n-1)(3n-2)}$　ⓡ $\dfrac{2n^2-5n+1}{3(3n-1)(3n-2)}$

問題Ⅰのウの解答群

ⓐ $\dfrac{6(k-1)(n-k)}{n(3n-1)(3n-2)}$　ⓑ $\dfrac{9(k-1)(n-k)}{n(3n-1)(3n-2)}$　ⓒ $\dfrac{27(k-1)(n-k)}{n(3n-1)(3n-2)}$

ⓓ $\dfrac{n-k+1}{3n(3n-1)(3n-2)}$　ⓔ $\dfrac{2(n-k+1)}{3n(3n-1)(3n-2)}$　ⓕ $\dfrac{6(n-k+1)}{n(3n-1)(3n-2)}$

ⓖ $\dfrac{9(n-k+1)}{n(3n-1)(3n-2)}$　ⓗ $\dfrac{18(n-k+1)}{n(3n-1)(3n-2)}$　ⓘ $\dfrac{27(n-k+1)}{n(3n-1)(3n-2)}$

（設問は次のページにつづく）

II　次の問題文の空欄に最も適する答えを解答群から選び，その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし，同じ記号を 2 度以上用いてもよい。(20 点)

a を $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$ を満たす定数とし，数列 $\{S_n\}$ を次で定める。

$$S_n = \int_a^1 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{n}{2}} dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) S_{n+2} を部分積分法を用いて計算し，さらに

$$-\int_a^1 x\left\{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{n+2}{2}}\right\}' dx = \left(\boxed{\text{カ}}\right) S_{n+2} + \left(\boxed{\text{キ}}\right) S_n$$

を用いると，次が成り立つ。

$$\left(\boxed{\text{キ}}\right) S_n + \left(\boxed{\text{カ}} - 1\right) S_{n+2} = \boxed{\text{ク}} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

(2) $S_n > 0$ に注意すると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$ と①より，次が成り立つ。

$$\lim_{n \to \infty} n\, S_{n+1} = \boxed{\text{ケ}} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

(3) ①の左辺に $n = 2k - 1$ を代入したものを L_k とおき，右辺に同様に $n = 2k - 1$ を代入したものを R_k とおく。N を自然数とすると，

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} L_k = \left(\boxed{\text{コ}}\right) \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} S_{2k-1} + \left(\boxed{\text{サ}}\right) S_{2N+1}$$

となる。これと①，②より，以下を得る。

$$\begin{aligned} S_1 - S_3 + S_5 - \cdots\cdots &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} S_{2k-1} \\ &= \frac{1}{\boxed{\text{コ}}} \lim_{N \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} R_k - \left(\boxed{\text{サ}}\right) S_{2N+1} \right\} \\ &= \boxed{\text{シ}} \end{aligned}$$

問題IIのカ，キ，ケ，コの解答群

ⓐ -4　ⓑ -3　ⓒ -2　ⓓ -1　ⓔ 0　ⓕ 1　ⓖ 2

ⓗ 3　ⓘ 4　ⓙ $n-4$　ⓚ $n-3$　ⓛ $n-2$　ⓜ $n-1$　ⓝ n

ⓞ $n+1$　ⓟ $n+2$　ⓠ $n+3$　ⓡ $n+4$　ⓢ $-2n$　ⓣ $2n$　ⓤ ∞

問題IIのクの解答群

ⓐ 0　ⓑ 1　ⓒ 2

ⓓ $a\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)^{\frac{n}{2}}$　ⓔ $a\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)^{\frac{n+1}{2}}$　ⓕ $a\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)^{\frac{n+2}{2}}$

ⓖ $1+a\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)^{\frac{n}{2}}$　ⓗ $1-a\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)^{\frac{n+1}{2}}$　ⓘ $1+a\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)^{\frac{n+2}{2}}$

問題IIのサの解答群

ⓐ $(-1)^N(2N-1)$　ⓑ $(-1)^{N+1}(2N-1)$　ⓒ $(-1)^N(2N)$

ⓓ $(-1)^{N+1}(2N)$　ⓔ $(-1)^N(2N+1)$　ⓕ $(-1)^{N+1}(2N+1)$

問題IIのシの解答群

ⓐ 0　ⓑ ∞　ⓒ $\dfrac{(1-a^2)^3}{2a}$　ⓓ $\dfrac{(1-a^2)^3}{3a}$

ⓔ $\dfrac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$　ⓕ $\dfrac{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$　ⓖ $\dfrac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$　ⓗ $\dfrac{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}{4a}$

ⓘ $\dfrac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}{3}$　ⓙ $\dfrac{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$　ⓚ $\dfrac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}$　ⓛ $\dfrac{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}{a}$

（設問は次のページにつづく）

III　数列 $\{a_n\}$ を次で定める。

$$a_1 = 8, \quad a_{n+1} = 2a_n^2 + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

さらに，a_n を 5 で割った商を b_n，余りを r_n とする。自然数 n に対して，以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) r_n を求めよ。

(2) b_n を 5 で割った余りを求めよ。

(3) a_n を 50 で割った余りを求めよ。

（設問は次のページにつづく）

IV　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ を考える。ただし，log は自然対数を表す。以下の問いに答えよ。必要であれば，自然対数の底 e に対して，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=\infty$ を使ってもよい。(30 点)

(1) $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，$a_n=\sqrt[n]{n}$ とおく。a_n の最大値と極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(3) $a<b$ となる自然数の組 $(a,\ b)$ で，$a^b=b^a$ を満たすものをすべて求めよ。

(4) (3) で求めた組 $(a,\ b)$ に対して，$c=\dfrac{\log a}{a}$ とおく。$y=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフと直線 $y=c$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

（以下計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

（計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）