

(i)

$$x = \cos A \text{ とおくと, } dx = -\sin A \, dA$$

また, x が $0 \rightarrow 1$ のとき, A は $\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ なので,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \int_0^1 \left| \sqrt{1-x^2} - \sin \theta \right| dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 |\sin A - \sin \theta| (-\sin A) dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin A - \sin \theta| \sin A dA \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 A \, dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2A}{2} dA \\ &= \left[\frac{1}{2} A - \frac{\sin 2A}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin A) \sin A \, dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin A - \sin^2 A) dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin A - \frac{1 - \cos 2A}{2} \right) dA \\ &= \left[-\cos A - \frac{2A - \sin 2A}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\pi}{4} \\ \text{(答)} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(ii)

$0 \leq A \leq \theta$ のとき, $\sin A \leq \sin \theta$ であり, $\theta \leq A \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin \theta \leq \sin A$ であるから,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \int_0^{\theta} (\sin \theta - \sin A) \sin A dA + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (\sin A - \sin \theta) \sin A dA \\ &= \int_0^{\theta} (\sin \theta \sin A - \sin^2 A) dA + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 A - \sin \theta \sin A) dA \\ &= \int_0^{\theta} \left(\sin \theta \sin A - \frac{1 - \cos 2A}{2} \right) dA + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2A}{2} - \sin \theta \sin A \right) dA \\ &= \left[-\sin \theta \cos A - \frac{2A - \sin 2A}{4} \right]_0^{\theta} + \left[\frac{2A - \sin 2A}{4} + \sin \theta \cos A \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \theta + \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad f(\theta) = \frac{\pi}{4} - \theta + \sin \theta - \sin \theta \cos \theta$$

(iii)

(ii) より, θ で微分して,

$$f'(\theta) = -1 + \cos \theta - \cos 2\theta$$

$$\text{(答)} \quad f'(\theta) = -1 + \cos \theta - \cos 2\theta$$

(iv)

$0 \leq \cos \theta \leq 1$ である。

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -1 + \cos \theta - \cos 2\theta \\ &= -1 + \cos \theta - (2\cos^2 \theta - 1) \\ &= -2\cos^2 \theta + \cos \theta \\ &= -\cos \theta (2\cos \theta - 1) \end{aligned}$$

より, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で $f'(\theta) = 0$ となるような θ は,

$$-\cos \theta (2\cos \theta - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0, \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$$

また,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

よって, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で $f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	-	-	0	+	0
$f(\theta)$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$1 - \frac{\pi}{4}$

$$\text{(答)} \quad \text{最大値 } \frac{\pi}{4} (\theta = 0), \text{ 最小値 } -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\theta = \frac{\pi}{3} \right)$$

(v)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \theta + \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \right) d\theta = \left[\frac{\pi}{4} \theta - \frac{1}{2} \theta^2 - \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

(答) -

(i)

$$I = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2e}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} x^2 \right) (-2x e^{-x^2}) dx \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{2} x^2 (e^{-x^2})' dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 -x e^{-x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} \right]_0^1 + I \\ &= -\frac{1}{2e} + I \\ &= \frac{e-2}{2e} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad I = \frac{e-1}{2e}, \quad S_1 = \frac{e-2}{2e}$$

(ii)

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \int_0^1 x^{2n+3} e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^1 -\frac{x^{2n+2} (e^{-x^2})'}{2} dx \\ &= \left[-\frac{x^{2n+2} e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2(n+1)x^{2n+1} e^{-x^2}}{2} dx \\ &= \left[-\frac{x^{2n+2} e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 + (n+1) S_n \\ &= (n+1) S_n - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S_{n+1} = (n+1) S_n - \frac{1}{2e}$$

(iii)

$$(ii) \text{の両辺を } (n+1)! \text{ で割って } \frac{S_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{S_n}{n!} - \frac{1}{2e(n+1)!}$$

$$T_n = \frac{S_n}{n!} \text{ を代入して,}$$

$$T_{n+1} = T_n - \frac{1}{2e(n+1)!}$$

$$(\text{答}) \quad T_{n+1} = T_n - \frac{1}{2e(n+1)!}$$

(iv)

 $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} T_n &= T_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2e(k!)} + \frac{1}{2e} \\ &= \frac{e-2}{2e} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2e(k!)} + \frac{1}{2e} \\ &= \frac{e-1}{2e} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2e(k!)} \end{aligned}$$

$$T_n = \frac{S_n}{n!} \text{ であるので,}$$

$$S_n = \left(\frac{e-1}{2e} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2e(k!)} \right) n!$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad S_n = \left(\frac{e-1}{2e} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2e(k!)} \right) n!$$

(v)

 x は 0 以上 1 以下なので,

$$\frac{1}{2e(n+1)} = \int_0^1 x^{2n+1} e^{-1} dx < S_n < \int_0^1 x^{2n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\frac{1}{2e(n+1)} < \frac{1}{2e} \left(e-1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) n! < \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < e-1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

(証明終)

(i)

1 回目偶数がでたら P へ、奇数がでたら R へ移動するので、

$$p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, q_1 = 0$$

2 回目 P にいるのは P で 3, 6 以外するとき、Q にいるのは P, R から 3, 6 を出すときであるので

$$p_2 = p_1 \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}, q_2 = 2 \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{2}, q_1 = 0, p_2 = \frac{1}{3}, q_2 = \frac{1}{3}$$

(ii)

$n+1$ 回目で Q に行くためには、 n 回目で P, R に行っていてそこから 3, 6 を出さないといけない。

n 回終わったとき、P, R にいる確率は $1-q_n$ であるから、

$$q_{n+1} = \frac{2}{6}(1-q_n) = \frac{1}{3}(1-q_n)$$

$$(\text{答}) \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}(1-q_n)$$

(iii)

R にある確率を r_n とすると、対称性より $r_n = p_n$

また $r_n + p_n + q_n = 1$ であるので、

$$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_n$$

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_n$$

(iv)

(ii) より、 $q_{n+1} = \frac{1}{3}(1-q_n)$ であるので、

$$q_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(q_n - \frac{1}{4}\right)$$

よって、 $\left\{q_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $-\frac{1}{4}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるので、

$$q_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$q_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_n$ に代入して、

$$p_n = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad q_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(v)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} = \frac{3}{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{3}{8}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{4}$$

(i)

45° の回転を表す行列なので,

$$A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ とする。 ($0 \leq \theta < 2\pi$)

また $B = \theta + \frac{\pi}{4}$ として, $x' = \cos B$, $y' = \sin B$ とする。

$$f = 4\cos^2 B + 2\sin^2 B = 4 - 2\sin^2 B$$

よって $\sin B = 0$ で最大値 4 をとる。 $\frac{\pi}{4} \leq B < \frac{9\pi}{4}$ より, $B = \pi, 2\pi$

このとき $B = \theta + \frac{\pi}{4}$ であるので, $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$$\text{つまり, } P = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(\text{答}) \quad f \text{ の最大値 } 4, P = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

(iii)

それぞれ整理すると,

$$(x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by \quad bx + cy) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

また,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

であるので,

$$f = 4 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

以上から式を比較して, $a=3, b=-1, c=3$ である。

$$(\text{答}) \quad a=3, b=-1, c=3$$

(iv)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \text{ であることより,}$$

$$\begin{aligned} g &= (x \ y) (B + kB^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x \ y) \begin{pmatrix} 10k+3 & -6k-1 \\ -6k-1 & 10k+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (10k+3)(x^2 + y^2) - 2(6k+1)xy \end{aligned}$$

となる。ここで, $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ とすると,

$$\begin{aligned} g &= (10k+3)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2(6k+1)\sin \theta \cos \theta \\ &= 10k+3 - 2(6k+1)\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

θ の値に関して, g が定数となるとき, この式は θ についての恒等式とみなせる。

よって, $k = -\frac{1}{6}$ でこのとき $g = \frac{4}{3}$

$$(\text{答}) \quad k = -\frac{1}{6}, g = \frac{4}{3}$$