

数 学

昼間コース・前期日程

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題用紙は4ページで、問題は4問あります。全問に解答しなさい。
解答は解答用紙に記入しなさい。表面に書ききれない場合は、裏面を使用して
もよいが、その場合は必ず表面に「裏面に続く」と記入しなさい。
3. 解答用紙は4枚(その1～その4)あります。
4. 受験番号を、すべての解答用紙の受験番号欄(1枚につき2カ所)に正確に記入
しなさい。
5. 試験中に問題用紙及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、汚れ等に
気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 試験時間は120分です。
7. 試験終了時に、監督者の指示に従って、すべての解答用紙を提出しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1**関数**

$$f(\theta) = \int_0^1 |\sqrt{1-x^2} - \sin \theta| dx$$

を区間 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で考えるとき、以下の問いに答えよ。(配点 50)

- (i) $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ.
- (ii) $f(\theta)$ を簡単な式で表せ.
- (iii) 導関数 $f'(\theta)$ を求めよ.
- (iv) 関数 $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ.
- (v) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta$ の値を求めよ.

2 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$S_n = \int_0^1 x^{2n+1} e^{-x^2} dx$$

とおく. 以下の問いに答えよ. ただし e は自然対数の底である. (配点 50)

- (i) $I = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$ および S_1 の値を求めよ.
- (ii) S_{n+1} を S_n を用いて表せ.
- (iii) $T_n = \frac{S_n}{n!}$ とおくとき, T_{n+1} を T_n を用いて表せ.
- (iv) S_n を求めよ. (必要ならば和の記号 $\sum$ を用いてよい.)
- (v) n が 1 以上の整数のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

3

右の図で、はじめ $\boxed{Q}$ にいて、さいころを投げるごとに、次の 2 つの規則に従って移動するものとする。



- ① $\boxed{Q}$ にいるとき、さいころの偶数の目が出たら $\boxed{P}$ に、奇数の目が出たら $\boxed{R}$ に移動する。
- ② $\boxed{P}$ あるいは $\boxed{R}$ にいるとき、さいころの 3 または 6 の目が出たら $\boxed{Q}$ に移動し、それ以外の数の目が出たらその場にとどまる。

n 回さいころを投げて移動した後に $\boxed{P}$, $\boxed{Q}$ にいる確率を、それぞれ p_n, q_n とする。以下の問いに答えよ。(配点 50)

- (i) p_1, q_1, p_2, q_2 を求めよ。
- (ii) q_{n+1} を q_n を用いて表せ。
- (iii) p_n を q_n を用いて表せ。
- (iv) p_n, q_n を求めよ。
- (v) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

4

点 $P(x, y)$ を原点 O のまわりに正の向きに角 45° だけ回転した点を $Q(x', y')$ とする. $f = 4(x')^2 + 2(y')^2$ とおき, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. 以下の問いに答えよ. (配点 50)

(i) (x, y) と (x', y') の関係は, 行列 A を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができる. このような行列 A を求めよ.

(ii) 点 $P(x, y)$ が C 上を動くとき, f の最大値とそのときの点 $P(x, y)$ の座標をすべて求めよ.

(iii) $f = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる定数 a, b, c の値を求めよ.

(iv) a, b, c を (iii) で求めた値とし,

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

とおく. 点 $P(x, y)$ が C 上を動くとき,

$$g = (x \ y) (B + kB^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が定数となるような定数 k の値と, そのときの g の値を求めよ.