

1

(i)

曲線 $C: y = \log x$ を x で微分すると $y' = \frac{1}{x}$ となるので、点 $P(t, \log t)$ における曲線 C の接線

ℓ の傾きは $\frac{1}{t}$ である。よって、求める接線 ℓ の方程式は、

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

である。

$$(\text{答}) y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

(ii)

点 $Q(x_0, 0)$ は接線 ℓ 上の点であるから、(i) で求めた方程式に $(x, y) = (x_0, 0)$ を代入して、

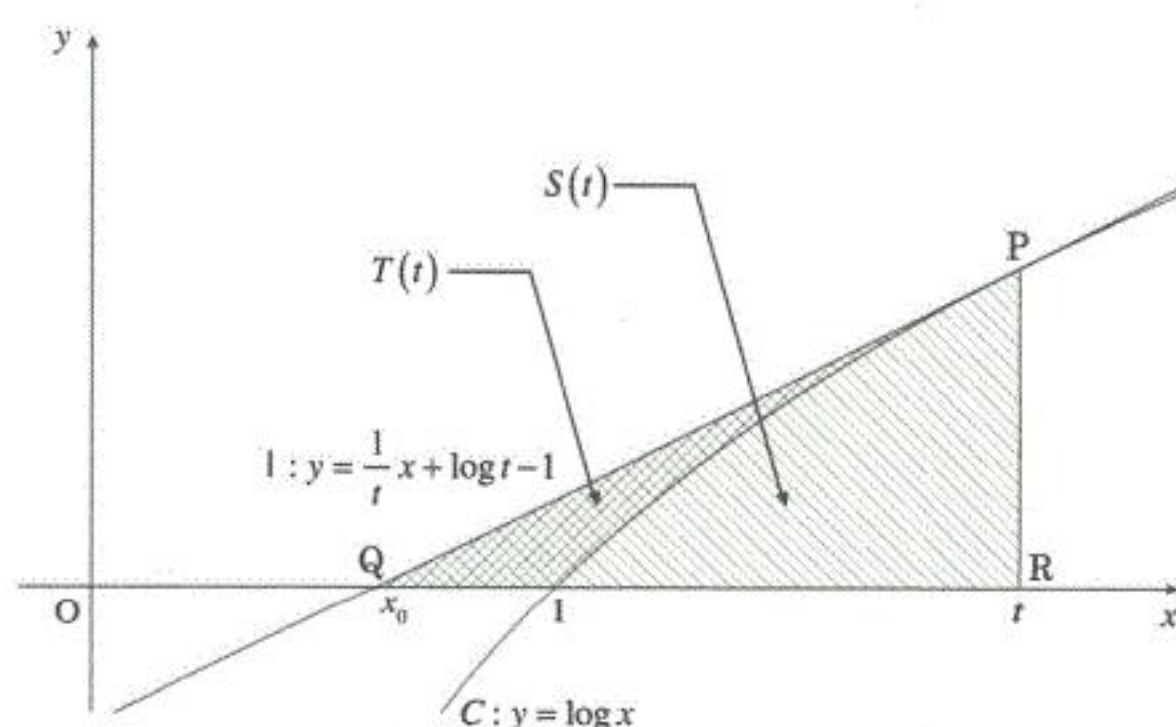
$$0 = \frac{1}{t}x_0 + \log t - 1$$

$$\therefore x_0 = t - t \log t$$

と求まる。

$$(\text{答}) x_0 = t - t \log t$$

(iii)



$S(t)$ は関数 $y = \log x$ を区間 $1 \leq x \leq t$ において x で積分すれば求まるので、

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_1^t \log x dx \\ &= [x \log x - x]_1^t \\ &= t \log t - t + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) S(t) = t \log t - t + 1$$

(iv)

点 $R(t, 0)$ を定義すると、題意の面積 $T(t)$ は、 $\triangle PQR$ から $S(t)$ をひくことによって求められる。 $\triangle PQR$ は、底辺 $(t - x_0)$ 、高さ $\log t$ の三角形なので、 $T(t)$ は、

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2}(t - x_0) \log t - S(t) \\ &= \frac{1}{2}\{t - (t - t \log t)\} \log t - (t \log t - t + 1) \\ &= \frac{1}{2}t(\log t)^2 - t \log t + t - 1 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) T(t) = \frac{1}{2}t(\log t)^2 - t \log t + t - 1$$

(v)

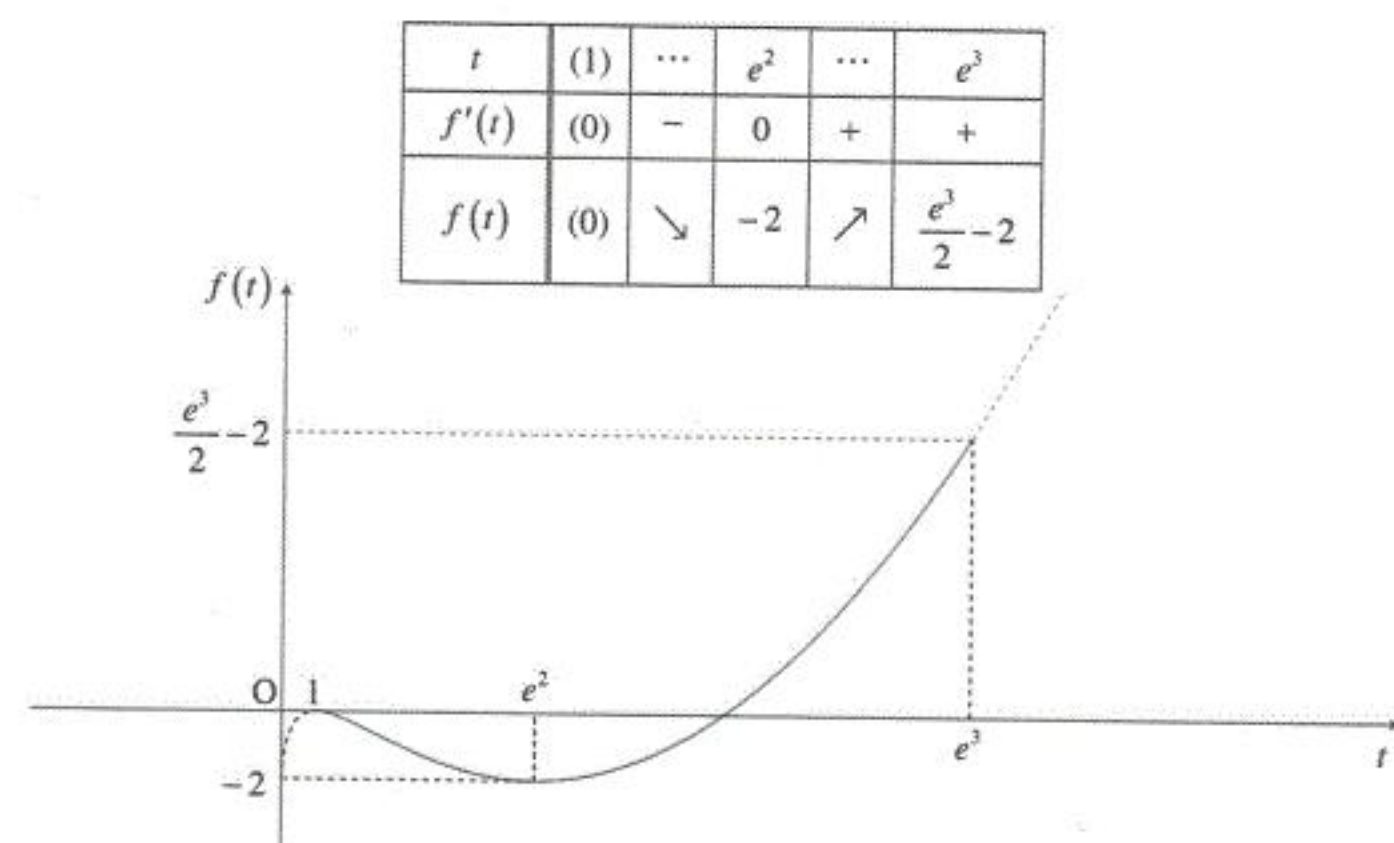
まず t を用いて $f(t)$ を表すと、

$$\begin{aligned} f(t) &= T(t) - S(t) \\ &= \left\{ \frac{1}{2}t(\log t)^2 - t \log t + t - 1 \right\} - (t \log t - t + 1) \\ &= \frac{1}{2}t(\log t)^2 - 2t \log t + 2t - 2 \end{aligned}$$

となる。 $f(t)$ の増減を調べるためにこれを t で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{2}(\log t)^2 + \frac{1}{2}t \cdot 2 \log t \cdot \frac{1}{t} - 2 \log t - 2t \cdot \frac{1}{t} + 2 \\ &= \frac{1}{2} \log t (\log t - 2) \end{aligned}$$

となる。 $\log t$ は t の増加関数なので、 $1 < t \leq e^3$ における $f(t)$ の増減とグラフの概形は下のようになる。



ここで、 $e > 2$ より、

$$\begin{aligned} f(e^3) &= \frac{e^3}{2} - 2 \\ &> \frac{2^3}{2} - 2 \\ &= 2 \\ &> f(1) \end{aligned}$$

である。よって、増減表より、 $f(t)$ の最大値は $f(e^3) = \frac{e^3}{2} - 2$ 、最小値は $f(e^2) = -2$ である。

$$(\text{答}) \text{ 増減表, 最大値: } \frac{e^3}{2} - 2, \text{ 最小値: } -2$$

(i)

部分積分を用いると,

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int e^x \sin x dx \\
 &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\
 &= e^x \sin x - J(x)
 \end{aligned}$$

であるから, $I(x) + J(x) = e^x \sin x$ である。同様に,

$$\begin{aligned}
 J(x) &= \int e^x \cos x dx \\
 &= e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \\
 &= e^x \cos x + I(x)
 \end{aligned}$$

であることから, $I(x) - J(x) = -e^x \cos x$ が求まる。

$$(\text{答}) \quad I(x) + J(x) = e^x \sin x, \quad I(x) - J(x) = -e^x \cos x$$

(ii)

まず, (i) により求めた等式の辺々を足し合わせると,

$$\begin{aligned}
 2I(x) &= e^x (\sin x - \cos x) \\
 \therefore I(x) &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^x \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

が求まる。次に, 不定積分 $\int f(x) dx = \int \sin(\log x) dx$ を求める。 $\log x = t$ と変数変換すると $x = e^t$ であり, これより $dx = e^t dt$ となることから,

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int \sin(\log x) dx \\
 &= \int \sin t \cdot e^t dt \\
 &= I(t) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^t \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} x \sin \left(\log x - \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \int f(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} x \sin \left(\log x - \frac{\pi}{4} \right)$$

(iii)

増加関数 $\log x$ は, $0 < x \leq 1$ において $\log x \leq 0$ であるから, $\beta_n = \log \alpha_n$ のように β_n を定義すると,

$$0 = \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \cdots > \beta_n > \beta_{n+1} > \cdots$$

のような不等式が成り立つ。さらに $\sin \beta_n = 0$ であることから, 数列 $\{\beta_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$ の一般項は,

$$\beta_n = -(n-1)\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

となる。 $\beta_n = \log \alpha_n$ より, $\alpha_n (n=1, 2, 3, \dots)$ は,

$$\log \alpha_n = -(n-1)\pi$$

$$\therefore \alpha_n = e^{-(n-1)\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha_n = e^{-(n-1)\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(iv)

区間 $\alpha_{n+1} < x < \alpha_n$ において曲線 $y = f(x)$ は x 軸との交点をもたないので, (ii), (iii) の結果を用いると題意の面積 $S_n (n=1, 2, 3, \dots)$ は,

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left| \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f(x) dx \right| \\
 &= \left| \left[\frac{\sqrt{2}}{2} x \sin \left(\log x - \frac{\pi}{4} \right) \right]_{e^{-n\pi}}^{e^{-(n-1)\pi}} \right| \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left| e^{-(n-1)\pi} \sin \left\{ -(n-1)\pi - \frac{\pi}{4} \right\} - e^{-n\pi} \sin \left(-n\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right|
 \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで, 自然数 n の奇偶によって場合分けすると,[1] n が奇数のとき

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left| e^{-(n-1)\pi} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - e^{-n\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \\
 &= \frac{1}{2} (e^\pi + 1) e^{-n\pi}
 \end{aligned}$$

[2] n が偶数のとき

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left| e^{-(n-1)\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{-n\pi} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| \\
 &= \frac{1}{2} (e^\pi + 1) e^{-n\pi}
 \end{aligned}$$

であるから, n の奇偶にかかわらず,

$$S_n = \frac{1}{2} (e^\pi + 1) e^{-n\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1}{2} (e^\pi + 1) e^{-n\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(v)

(iv) より, 数列 $\{S_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$ は, 初項 $\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})$, 公比 $e^{-\pi} (<1)$ の等比数列であるから,無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 S は,

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n \\
 &= \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1}
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1}$$

3

(i)

等比数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項はそれぞれ,

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = bs^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と表されるから,

$$\begin{aligned} x_n &= a_n + b_n \\ &= ar^{n-1} + bs^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} x_1 x_3 - x_2^2 &= (a+b)(ar^2 + bs^2) - (ar + bs)^2 \\ &= abr^2 + abs^2 - 2abrs \\ &= ab(r-s)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 x_4 - x_3^2 &= (ar + bs)(ar^3 + bs^3) - (ar^2 + bs^2)^2 \\ &= abr^3 s + abrs^3 - 2abr^2 s^2 \\ &= abrs(r-s)^2 \end{aligned}$$

のように因数分解することができる。

$$(\text{答}) \quad x_1 x_3 - x_2^2 = ab(r-s)^2, \quad x_2 x_4 - x_3^2 = abrs(r-s)^2$$

(ii)

(i)と同様に考えると,

$$\begin{aligned} x_1 x_4 - x_2 x_3 &= (a+b)(ar^3 + bs^3) - (ar + bs)(ar^2 + bs^2) \\ &= abr^3 + abs^3 - abr^2 s - abrs^2 \\ &= ab(r+s)(r-s)^2 \end{aligned}$$

のように因数分解できる。

$$(\text{答}) \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 = ab(r+s)(r-s)^2$$

(iii)

与えられた値を代入すると,

$$x_1 x_3 - x_2^2 = 4 \cdot 11 - 7^2 = -5$$

$$x_2 x_4 - x_3^2 = 7 \cdot 13 - 11^2 = -30$$

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 4 \cdot 13 - 7 \cdot 11 = -25$$

となるから, (i), (ii)より,

$$ab(r-s)^2 = -5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$abrs(r-s)^2 = -30 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$ab(r+s)(r-s)^2 = -25 \quad \dots \textcircled{3}$$

という関係式が得られる。②÷①より $rs=6$, ③÷①より $r+s=5$ と求まるので, r, s はそれぞれ u の 2 次方程式 $u^2 - 5u + 6 = (u-2)(u-3) = 0$ の 2 解である。ここで, $r < s$ であるから,

$$r=2, s=3$$

が求まる。この結果を①式に代入すると, $ab=-5$ であり, また,

$$x_1 = a + b = 4$$

であることから, a, b はそれぞれ v の 2 次方程式 $v^2 - 4v - 5 = (v+1)(v-5) = 0$ の 2 解である。[1] $(a, b) = (-1, 5)$ のとき

$$x_2 = ar + bs = -1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 12$$

となるので不適。

[2] $(a, b) = (5, -1)$ のとき

$$x_2 = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 7$$

$$x_3 = 5 \cdot 2^2 + (-1) \cdot 3^2 = 11$$

$$x_4 = 5 \cdot 2^3 + (-1) \cdot 3^3 = 13$$

となるから, 条件に適する。

以上[1], [2]より,

$$a=5, b=-1$$

である。よって, 数列 $\{x_n\}$ の一般項は,

$$\begin{aligned} x_n &= ar^{n-1} + bs^{n-1} \\ &= 5 \cdot 2^{n-1} - 3^{n-1} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \begin{aligned} a &= 5, b = -1, r = 2, s = 3 \\ x_n &= 5 \cdot 2^{n-1} - 3^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

(iv)

(iii)より $x_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3^{n-1}$ であるから, 数列 $\{x_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n x_k \\ &= \sum_{k=1}^n (5 \cdot 2^{k-1} - 3^{k-1}) \\ &= 5 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} - 1 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= 5 \cdot 2^n - \frac{3^n}{2} - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S_n = 5 \cdot 2^n - \frac{3^n}{2} - \frac{9}{2}$$

(v)

(iii), (iv)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{S_n} &= \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 3^{n-1}}{5 \cdot 2^n - \frac{3^n}{2} - \frac{9}{2}} \\ &= \frac{\frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3}}{5 \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n} \end{aligned}$$

のように表すことができる。 $n \rightarrow \infty$ のとき, $\left(\frac{2}{3} \right)^n \rightarrow 0$, $\left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0$ であるから, 求める極限値は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{S_n} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 0 - \frac{1}{3}}{5 \cdot 0 - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \cdot 0} = \frac{2}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{S_n} = \frac{2}{3}$$

4

(i)

法線ベクトル $\vec{n} = (a, b)$ は、直線 l の方向ベクトル $(1, 2)$ と垂直であるから、

$$(a, b) \cdot (1, 2) = a + 2b = 0$$

$$\therefore b = -\frac{a}{2}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} |\vec{n}| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} a \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

と表せるが、これが1と等しいので、 $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ と求まる。

$$(\text{答}) \ a = \frac{2}{\sqrt{5}}, b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(ii)

$\overline{OP}$ の $\vec{n}$ への正射影を $\vec{h}$ とすると、

$$\vec{h} = \frac{\overline{OP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = |\overline{OP}| \cos \theta \cdot \vec{n}$$

と表される。 $h = |\vec{h}|$ であるから、

$$h = |\overline{OP}| |\cos \theta|$$

となる。

次に、 h を x, y を用いて表す。 $\vec{h}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \frac{\overline{OP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \\ &= \frac{(x, y) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1^2} \vec{n} \\ &= \frac{(2x - y)}{\sqrt{5}} \vec{n} \end{aligned}$$

となることから、 $h = \frac{|2x - y|}{\sqrt{5}}$ である。

$$(\text{答}) \ h = |\overline{OP}| |\cos \theta| = \frac{|2x - y|}{\sqrt{5}}$$

(iii)

線分 AP の長さと h が等しくなればよいので、等式 $AP = h$ を変形することで、

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{|2x-y|}{\sqrt{5}}$$

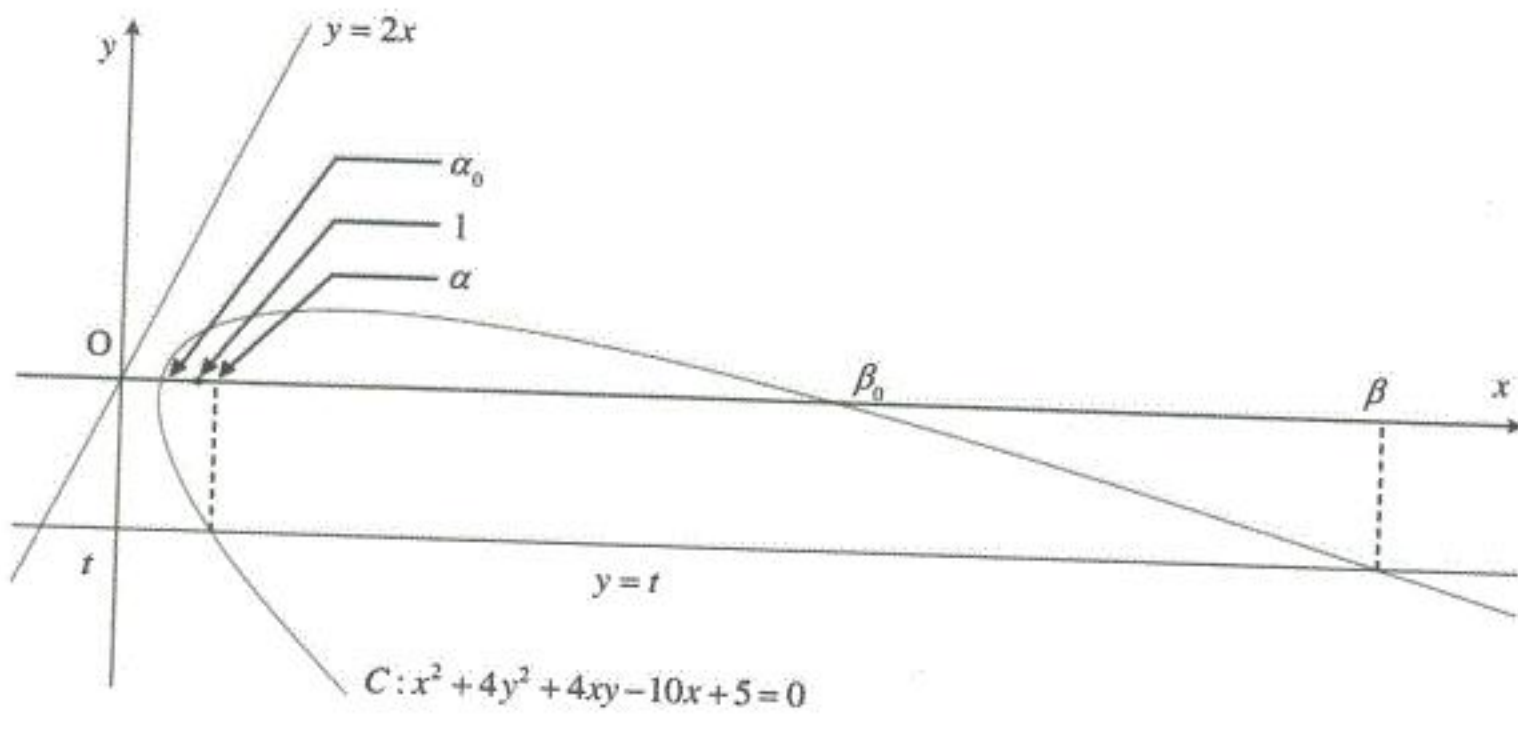
$$\therefore 5\{(x-1)^2 + y^2\} = (2x-y)^2$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 + 4xy - 10x + 5 = 0$$

という関係式が得られる。

$$(\text{答}) \ x^2 + 4y^2 + 4xy - 10x + 5 = 0$$

(iv)



共有点の個数を求めるために、 $y = t$ を(iii)で得られた式に代入すると、

$$x^2 + 4t^2 + 4xt - 10x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(2t-5)x + 4t^2 + 5 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

という x の2次方程式が得られる。この方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (2t-5)^2 - (4t^2 + 5) \\ &= -20(t-1) \end{aligned}$$

であるから、方程式①の異なる実数解の個数は、

$t < 1$ のとき、2個

$t = 1$ のとき、1個

$t > 1$ のとき、0個

である。求める共有点の個数は、この実数解の個数と等しい。

(答) $t < 1$ のとき、2個

$t = 1$ のとき、1個

$t > 1$ のとき、0個

(v)

共有点 Q, R の x 座標をそれぞれ α, β とする ($\alpha < \beta$ としてよい) と、 α, β は x の2次方程式①の異なる2つの実数解である。解と係数の関係から、

$$\alpha + \beta = -4t + 10$$

$$\alpha\beta = 4t^2 + 5$$

とわかるので、線分 QR の長さは、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{(-4t + 10)^2 - 4(4t^2 + 5)} \\ &= \sqrt{80(1-t)} \\ &= 4\sqrt{5(1-t)} \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \ 4\sqrt{5(1-t)}$$

(vi)

$0 < 1$ なので、(iv)より、曲線 C と直線 $y = 0$ は共有点を2つもつ。その x 座標は、①式に $t = 0$ を代入したときの x の2次方程式

$$x^2 - 10x + 5 = 0$$

の異なる2つの実数解である。その実数解を小さいほうから順に α_0, β_0 とする。ここで、(iii)において求めた曲線 C の式 $x^2 + 4y^2 + 4xy - 10x + 5 = 0$ を変形すると、

$$\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{10x-5}{4}$$

となるが、左辺はつねに0以上なので、右辺 ≥ 0 が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} y + \frac{x}{2} &= \pm \frac{\sqrt{10x-5}}{2} \\ \therefore y &= -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{10x-5}}{2} \end{aligned}$$

と表すことができる。このうち $(x, y) = (\alpha_0, 0), (\beta_0, 0)$ を代入しても成り立つのは、

$y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{10x-5}}{2}$ のほうだけであるので、曲線 C のうち x 軸よりも上側に存在する部分の式は、

$$y = \frac{-x + \sqrt{10x-5}}{2}$$

と表される。よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \frac{-x + \sqrt{10x-5}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{15}(10x-5)^{\frac{3}{2}} \right]_{\alpha_0}^{\beta_0} \\ &= -\frac{1}{4}(\beta_0^2 - \alpha_0^2) + \frac{1}{30} \left\{ (10\beta_0-5)^{\frac{3}{2}} - (10\alpha_0-5)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ &= -\frac{1}{4}(\beta_0 - \alpha_0)(\alpha_0 + \beta_0) + \frac{1}{30}(\beta_0^3 - \alpha_0^3) \\ &= -\frac{1}{4}(\beta_0 - \alpha_0)(\alpha_0 + \beta_0) + \frac{1}{30}(\beta_0 - \alpha_0) \{ (\alpha_0 + \beta_0)^2 - \alpha_0\beta_0 \} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 10 + \frac{1}{30} \cdot 4\sqrt{5} \cdot (10^2 - 5) \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$

と求まる。ここで、 α_0, β_0 が $4x^2 - 10x + 5 = 0$ の解であることから、

$$10\alpha_0 - 5 = \alpha_0^2$$

$$10\beta_0 - 5 = \beta_0^2$$

$$\alpha_0 + \beta_0 = 10$$

$$\alpha_0\beta_0 = 5$$

$$\beta_0 - \alpha_0 = \sqrt{(\alpha_0 + \beta_0)^2 - 4\alpha_0\beta_0} = \sqrt{10^2 - 4 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

をみたすことを用いた。

$$(\text{答}) \ \frac{8}{3}\sqrt{5}$$