

数 学

昼間コース・前期日程

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題用紙は4ページで、問題は4問あります。全問に解答しなさい。
解答は解答用紙に記入しなさい。表面に書ききれない場合は、裏面を使用して
もよいが、その場合は必ず表面に「裏面に続く」と記入しなさい。
3. 解答用紙は4枚(その1～その4)あります。
4. 受験番号を、すべての解答用紙の受験番号欄(1枚につき2カ所)に正確に記入
しなさい。
5. 試験中に問題用紙及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、汚れ等に
気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 試験時間は120分です。
7. 試験終了時に、監督者の指示に従って、すべての解答用紙を提出しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1

xy 平面上の曲線 $C: y = \log x$ に対して、以下の問いに答えよ。

ただし、 $\log x$ は e を底とする自然対数とする。（配点 50）

- (i) 曲線 C 上の点 $P(t, \log t)$ における C の接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (ii) 接線 ℓ と x 軸の交点 Q の x 座標を x_0 とする。 x_0 を t を用いて表せ。
- (iii) $t > 1$ のとき、曲線 C と x 軸 および 直線 $x = t$ とで囲まれる部分の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ を t を用いて表せ。
- (iv) $t > 1$ のとき、曲線 C と x 軸 および 接線 ℓ とで囲まれる部分の面積を $T(t)$ とする。 $T(t)$ を t を用いて表せ。
- (v) $1 < t \leq e^3$ の範囲において、 $f(t) = T(t) - S(t)$ とおく。

このとき、関数 $f(t)$ の増減を調べ、 $f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。

ただし、 $2 < e < 3$ であることは既知としてよい。

2

 $x > 0$ において関数

$$f(x) = \sin(\log x)$$

を考える.

方程式 $f(x) = 0$ の $0 < x \leq 1$ における解を大きいほうから順にならべて,

$$1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n > \alpha_{n+1} > \cdots$$

とする. 以下の問いに答えよ. ただし, $\log x$ は e を底とする自然対数とする.

なお, 不定積分の計算においては積分定数を省略してもよい. (配点 50)

(i) 不定積分 $I(x), J(x)$ をそれぞれ

$$I(x) = \int e^x \sin x \, dx, \quad J(x) = \int e^x \cos x \, dx$$

とおくとき, $I(x) + J(x), I(x) - J(x)$ を求めよ.

(ii) 不定積分 $\int f(x) \, dx$ を求めよ.

(iii) α_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(iv) 区間 $\alpha_{n+1} \leq x \leq \alpha_n$ において, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする. S_n を求めよ.

(v) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 S を求めよ.

3

初項が a で公比が r の等比数列を $\{a_n\}$ とし、初項が b で公比が s の等比数列を $\{b_n\}$ とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義するとき、以下の問いに答えよ。(配点 50)

- (i) $x_1x_3 - x_2^2$ と $x_2x_4 - x_3^2$ をそれぞれ a, b, r, s の式で表し、因数分解せよ。
 (ii) $x_1x_4 - x_2x_3$ を a, b, r, s の式で表し、因数分解せよ。

以下では、 $r < s$ とし、数列 $\{x_n\}$ のはじめの 4 つの項が

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = 11, \quad x_4 = 13$$

となる場合を考える。

- (iii) a, b, r, s の値を求め、数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。
 (iv) 数列 $\{x_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。
 (v) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{S_n}$ を求めよ。

4

直線 $\ell : y = 2x$ の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b)$ とし、点 $P(x, y)$ と直線 ℓ との距離を h とする。ただし、 $|\vec{n}| = 1$ で、 $a > 0$ とする。

以下の問いに答えよ。(配点 50)

- (i) $\vec{n}$ の成分 a, b を求めよ。
- (ii) 原点を O とし、 $\vec{0}$ でない $\overrightarrow{OP}$ に対し、 $\overrightarrow{OP}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とする。
このとき、 h を $|\overrightarrow{OP}|$ と θ を用いて表せ。また、 h を x, y を用いて表せ。

以下では、曲線 C を、点 $A(1, 0)$ と直線 ℓ からの距離が等しい点 $P(x, y)$ の軌跡とする。

- (iii) 曲線 C の方程式 (x, y の関係式) を求めよ。
- (iv) 曲線 C と直線 $y = t$ (t は定数) との共有点の個数を求めよ。
- (v) 曲線 C と直線 $y = t$ が 2 個の共有点 Q, R をもつとき、線分 QR の長さを t を用いて表せ。
- (vi) 曲線 C と直線 $y = 0$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。