

I

(i)

商の微分法を利用すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

(ii)

変曲点を求めるためには2階の導関数が必要なので、 $f'(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

である。よって、

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ の前後で、 $f''(x)$ の符号が負から正に変わることから、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4} \right)$$

は変曲点であり、変曲点Pは第1象限にあることから、これが求める点Pである。

(答) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4} \right)$

(iii)

接線 ℓ の傾きは、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

と求められるから、接線 ℓ

$$\begin{aligned} y - \frac{3}{4} &= -\frac{3\sqrt{3}}{8} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \therefore y &= -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$

(iv)

x を θ で微分すると、

$$\frac{dx}{d\theta} = \tan^2 \theta + 1 = x^2 + 1$$

であるから、

$$d\theta = \frac{dx}{x^2+1}$$

が導ける。よって、

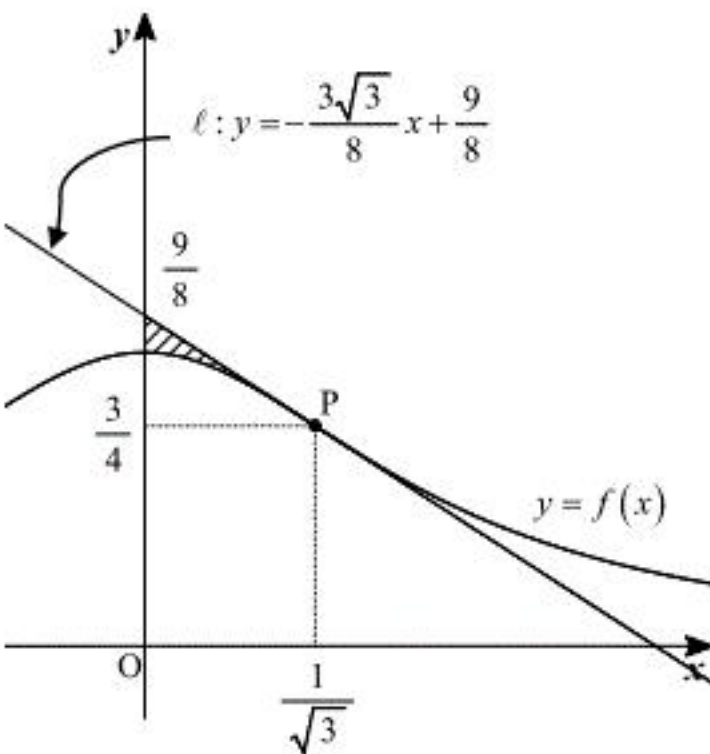
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \int d\theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

となる。(問題文の指示より積分定数は省略した)

(答) $I = \theta$

(v)

図を描くと



のようになっているので、求める面積 S は、 $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ の範囲で接線 ℓ より下の台形の面積

から、 $y=f(x)$ の下部分を引けばよく、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{4} \right) - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{16} - [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{6}$

(i)

積分変数が x の積分では t を定数として扱ってよいので、 I を変形すると、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \{t \sin x - f(x)\}^2 dx \\ &= t^2 \int_0^\pi \sin^2 x dx - 2t \int_0^\pi f(x) \sin x dx + \int_0^\pi \{f(x)\}^2 dx \\ &= c_1 t^2 - 2c_2 t + c_3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = c_1 t^2 - 2c_2 t + c_3$$

(ii)

積分計算すると、

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^\pi \sin^2 x dx \\ &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad c_1 = \frac{\pi}{2}$$

(iii)

c_1, c_2, c_3 は t によらない定数なので、 I を t の2次関数として、 t について平方完成をすると、

$$\begin{aligned} I &= c_1 t^2 - 2c_2 t + c_3 \\ &= c_1 \left(t - \frac{c_2}{c_1} \right)^2 - \frac{c_2^2}{c_1} + c_3 \end{aligned}$$

となるので、 I を最小にする t の値 t_0 は、 $c_1 = \frac{\pi}{2}$ を利用して計算すると、

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{c_2}{c_1} \\ &= \frac{2c_2}{\pi} \end{aligned}$$

であり、最小値 I_0 は、

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{c_2^2}{c_1} + c_3 \\ &= -\frac{2c_2^2}{\pi} + c_3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t_0 = \frac{2c_2}{\pi}, \quad I_0 = -\frac{2c_2^2}{\pi} + c_3$$

(iv)

部分積分を使うと、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi x \sin x dx \\ &= \int_0^\pi x (-\cos x)' dx \\ &= -[x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。同様に B を計算すると、

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\pi x \cos x dx \\ &= \int_0^\pi x (\sin x)' dx \\ &= [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \\ &= 0 + [\cos x]_0^\pi \\ &= -2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \pi, \quad B = -2$$

(v)

c_2 に $f(x) = x(\pi - x)$ を代入して計算すると、

$$\begin{aligned} c_2 &= \int_0^\pi f(x) \sin x dx \\ &= \int_0^\pi x(\pi - x) \sin x dx \\ &= \pi \int_0^\pi x \sin x dx - \int_0^\pi x^2 \sin x dx \\ &= \pi \int_0^\pi x \sin x dx + [x^2 \cos x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \cos x dx \end{aligned}$$

となり、ここで、 $A = \int_0^\pi x \sin x dx = \pi$ と $B = \int_0^\pi x \cos x dx = -2$ であるから、

$$\begin{aligned} c_2 &= A\pi - \pi^2 - 2B \\ &= \pi^2 - \pi^2 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。同様に c_3 を求めると、

$$\begin{aligned} c_3 &= \int_0^\pi \{f(x)\}^2 dx \\ &= \int_0^\pi \{x(\pi - x)\}^2 dx \\ &= \int_0^\pi (x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{\pi}{2} x^4 + \frac{\pi^2}{3} x^3 \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{5} \pi^5 - \frac{1}{2} \pi^5 + \frac{1}{3} \pi^5 \\ &= \frac{\pi^5}{30} \end{aligned}$$

となる。よって、 I_0 の値は、

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{2c_2^2}{\pi} + c_3 \\ &= -\frac{32}{\pi} + \frac{\pi^5}{30} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad c_2 = 4, \quad c_3 = \frac{\pi^5}{30}, \quad I_0 = -\frac{32}{\pi} + \frac{\pi^5}{30}$$

3

(i)

b_1 について、

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1-2}{a_1+2} \\ &= \frac{a-2}{a+2} \end{aligned}$$

である。ここで、明らかに $a-2 < a+2$ であるから、

$$\frac{a-2}{a+2} < 1$$

である。また、 $0 < a$ なので、

$$\begin{aligned} 0 &< 2a \\ \Leftrightarrow -a &< a \\ \Leftrightarrow -a-2 &< a-2 \\ \Rightarrow -1 &< \frac{a-2}{a+2} \end{aligned}$$

である。

以上より、

$$-1 < b_1 < 1$$

である。

(証明終)

(ii)

まず、すべての自然数 n に対し、 $a_n > 0$ であることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = a > 0$ より成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定して、 $n=k+1$ のとき

$a_k > 0$ と漸化式の形から、 a_{k+1} は常に定義され、相加相乗平均より

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{4}{a_k} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{a_k \cdot \frac{4}{a_k}} = 2 > 0$$

となる。よって、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上、[1]、[2]より、 $a_n > 0$ であり、特に、 b_n は正しく定義されることがわかる。

b_{n+1} を変形すると、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) - 2}{\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) + 2} \\ &= \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{a_n^2 + 4a_n + 4} \\ &= \frac{(a_n - 2)^2}{(a_n + 2)^2} \\ &= b_n^2 \end{aligned}$$

と a_n や b_n で表すことができる。

$$(答) \quad b_{n+1} = \frac{(a_n - 2)^2}{(a_n + 2)^2}, \quad b_{n+1} = b_n^2$$

(iii)

(ii)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} b_3 &= b_2^2 \\ &= b_1^4 \\ b_4 &= b_3^2 \\ &= b_1^8 \end{aligned}$$

となる。また、一般項は $b_n = b_1^{2^{n-1}}$ ($n \geq 1$) …①となることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$b_1^{2^{n-1}} = b_1^{2^{1-1}} = b_1$ となるため、①が成り立つ。

[2] $n=k$ ($k \geq 1$) のとき、①が成り立つと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= b_k^2 \\ &= \left(b_1^{2^{k-1}} \right)^2 \\ &= b_1^{2 \cdot 2^{k-1}} \\ &= b_1^{2^{(k+1)-1}} \end{aligned}$$

となるため、 $n=k$ のとき①が成り立つならば、 $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

以上、[1]、[2]より、自然数 n に対し、①が成り立つ。

$$(答) \quad b_3 = b_1^4, \quad b_4 = b_1^8, \quad b_n = b_1^{2^{n-1}}$$

(iv)

与えられた a_n と b_n の関係式を変形すると、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n-2}{a_n+2} \\ \Leftrightarrow (a_n+2)b_n &= a_n-2 \\ \Leftrightarrow 2(1+b_n) &= (1-b_n)a_n \end{aligned}$$

となる。ここで、(i)より $-1 < b_1 < 1$ であり、また、(iii)より $b_n = b_1^{2^{n-1}}$ ($n \geq 1$) であるため、 $n \geq 2$ の

とき、 $0 \leq b_n < 1$ となる。よって、 $b_n \neq 1$ ($n \geq 1$) であるため、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(1+b_n)}{1-b_n} \quad (\because b_n \neq 1) \\ &= \frac{2(1+b_1^{2^{n-1}})}{1-b_1^{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a_n = \frac{2(1+b_1^{2^{n-1}})}{1-b_1^{2^{n-1}}}$$

(v)

(i)より、 $-1 < b_1 < 1$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_1^{2^{n-1}} = 0$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{2(1+0)}{1-0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

(i)

与式 $A-B=E$ の両辺に左から A をかけると、

$$\begin{aligned} A^2-AB &= A \\ \Leftrightarrow A^2-A &=-E \quad (\because AB=-E) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^2-A=-E$$

(ii)

$A^2-A=-E$ の両辺に左から A をかけると、

$$\begin{aligned} A^3-A^2 &=-A \\ \Leftrightarrow A^3 &=A^2-A \\ \Leftrightarrow A^3 &=-E \end{aligned}$$

と A^3 が求まる。

$$(\text{答}) \quad A^3=-E$$

(iii)

(ii)の結果から、 $A^6=(A^3)^2=E$ となることがわかるので、これが $A^n=E$ となる最小の正の整数 n であるか確かめる。

まず $A=kE$ (k は定数) と仮定すると、 $AB=-E$ より $k \neq 0$ かつ $B=-\frac{1}{k}E$ になるが、このとき

$$A-B=\left(k+\frac{1}{k}\right)E$$

となり、相加相乗平均の関係から、

$$k+\frac{1}{k} \geq 2$$

なので、 $A-B \neq E$ である。これは $A-B=E$ を満たさないので矛盾。よって、

$$A \neq kE \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 $A^2 \sim A^5$ を計算すると、

$$\begin{aligned} A^2 &= A-E \\ A^3 &=-E \\ A^4 &=-A \\ A^5 &=-A^2 \\ &=-A+E \end{aligned}$$

である。ここで A は単位行列の定数倍ではないので、これらはいずれも単位行列ではない。よって、 $A^n=E$ となる最小の整数 n は 6 である。

$$(\text{答}) \quad n=6$$

(iv)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$$

である。また、(i)より $A^2=A-E$ であるから、これを代入すると、

$$\{1-(a+d)\}A+\{(ad-bc)-1\}E=0$$

である。 $1-(a+d) \neq 0$ とすると、 A は単位行列の定数倍となり、 $\textcircled{1}$ に矛盾する。よって、

$$a+d=1$$

であり、このとき、

$$ad-bc=1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a+d=1, \quad ad-bc=1$$

(v)

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を代入して計算すると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、 $a=3, c=1$ である。ここで (iv) より $a+d=1, ad-bc=1$ であるから、

$b=-7, d=-2$ が導ける。

$$(\text{答}) \quad A=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$