

数 学

昼間・前期日程

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題用紙は4ページで、問題は4問あります。全問に解答しなさい。
解答は解答用紙に記入しなさい。表面に書ききれない場合は、裏面を使用してもよいが、その場合は必ず表面に「裏面に続く」と記入しなさい。
3. 解答用紙は4枚(その1～その4)あります。
4. 受験番号を、すべての解答用紙の受験番号欄(1枚につき2カ所)に正確に記入しなさい。
5. 試験中に問題用紙及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 試験時間は120分です。
7. 試験終了時に、監督者の指示に従って、すべての解答用紙を提出しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1

関数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ に対して, xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ を考える.

このとき, 以下の問いに答えよ. (配点 50)

- (i) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (ii) 曲線 C の第 1 象限にある変曲点 P の座標を求めよ.
- (iii) 変曲点 P における曲線 C の接線 ℓ の方程式を求めよ.
- (iv) $x = \tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおく. このとき, 不定積分

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

を θ を用いて表せ.

なお, 不定積分の計算においては積分定数を省略してもよい.

- (v) 曲線 C と 接線 ℓ および y 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ.

2

区間 $0 \leq x \leq \pi$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、定積分

$$I = \int_0^{\pi} \{t \sin x - f(x)\}^2 dx \quad (t \text{ は実数})$$

を考える．定数 c_1, c_2, c_3 を

$$c_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx, \quad c_2 = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx, \quad c_3 = \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．（配点 50）

(i) I を， t および c_1, c_2, c_3 を用いて表せ．

(ii) c_1 の値を求めよ．

以下では， I を最小にする t の値を t_0 とし，その最小値を I_0 とする．

(iii) t_0 を c_2 を用いて表せ．また， I_0 を c_2, c_3 を用いて表せ．

(iv) 次の定積分 A, B の値を求めよ．

$$A = \int_0^{\pi} x \sin x dx, \quad B = \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

(v) $f(x) = x(\pi - x)$ のとき， c_2, c_3 および I_0 の値をそれぞれ求めよ．

3

a を正の定数とし、次のように定められた 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える.

$$\begin{cases} a_1 = a, & a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2} & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき、以下の問いに答えよ. (配点 50)

- (i) $-1 < b_1 < 1$ であることを示せ.
- (ii) b_{n+1} を a_n を用いて表せ. さらに, b_{n+1} を b_n を用いて表せ.
- (iii) b_3, b_4 をそれぞれ b_1 を用いて表せ.
さらに、数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n と b_1 を用いて表せ.
- (iv) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n と b_1 を用いて表せ.
- (v) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

4

次の条件をみたす 2 次正方行列 A, B を考える.

$$AB = -E, \quad A - B = E \quad (E \text{ は単位行列})$$

このとき、以下の問いに答えよ. (配点 50)

(i) $A^2 - A$ を求めよ.

(ii) A^3 を求めよ.

(iii) $A^n = E$ となる最小の正の整数 n を求めよ.

(iv) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき、 $a + d$, $ad - bc$ の値をそれぞれ求めよ.

ただし、 a, b, c, d は実数とする.

(v) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるとき、 A を求めよ.