

1

(i)

$$f'(x) = \cos x + \frac{-\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x(2\sin^2 x - 1)}{2\sin^2 x}$$

より、 $0 < x < \pi$ のとき

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0, \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi$

(ii)

(i)より、増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

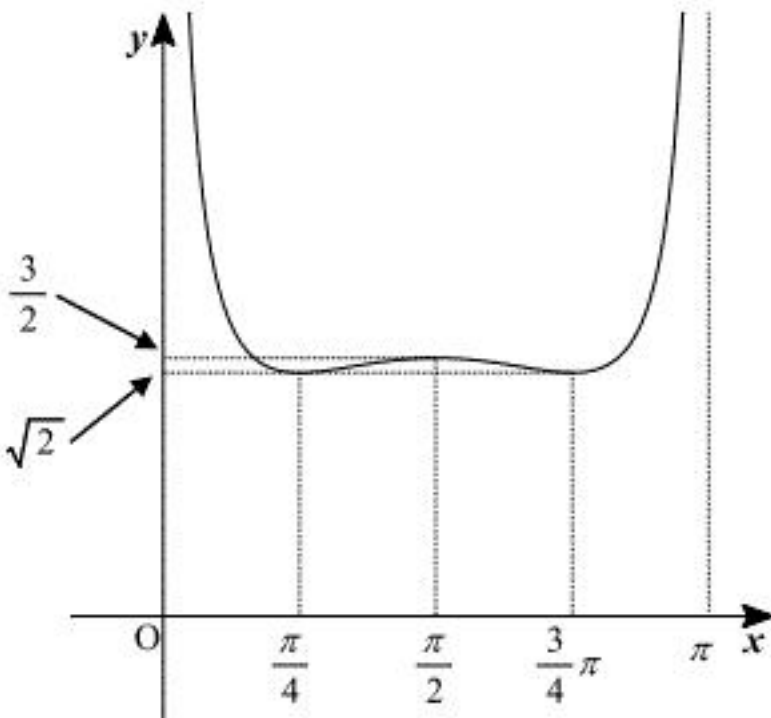
(答) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \text{ のとき極小値 } \sqrt{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき極大値 } \frac{3}{2} \end{cases}$

また、極限を求めると

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x) = \infty$$

となる。よってグラフは次のようになる。



(答)前図

(iii)

$$\frac{d}{dx} \{ \log(1 - \cos x) - \log(1 + \cos x) \} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{-\sin x}{1 + \cos x} \quad (\because -1 < \cos x < 1)$$

$$= \frac{2\sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2\sin x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin x}$$

となる。

(答) $\frac{2}{\sin x}$

(iv)

(iii)の結果より

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\sin x + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sin x} \right) dx$$

$$= \left[-\cos x + \frac{1}{4} \{ \log(1 - \cos x) - \log(1 + \cos x) \} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \log \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \log \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right)$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$= \sqrt{2} + \log (\sqrt{2} + 1)$$

となる。

(答) $\sqrt{2} + \log (\sqrt{2} + 1)$

(i)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 y dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{e^2 + 1}{e^{-2} + 1} \\
 &= \frac{1}{2} \log e^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となる。

(答)1

(ii)

(i)の積分計算を利用すると

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{1}{n} \int_{-n}^n y dx \\
 &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) \right]_{-n}^n \\
 &= \frac{1}{2n} \log \frac{e^{2n} + 1}{e^{-2n} + 1} \\
 &= \frac{1}{2n} \log e^{2n} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となる。

(答)1

(iii)

$$\begin{aligned}
 J_n &= \frac{1}{n} \int_{-n}^n y(1-y) dx \\
 &= \frac{1}{n} \int_{-n}^n \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \\
 &= \frac{1}{n} \int_{-n}^n \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx \\
 &= \frac{1}{n} \int_{-n}^n \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{2x} + 1} \right]_{-n}^n \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{e^{-2n} + 1} - \frac{1}{e^{2n} + 1} \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\frac{e^{2n}}{e^{2n} + 1} - \frac{1}{e^{2n} + 1} \right) \\
 &= \frac{e^{2n} - 1}{2n(e^{2n} + 1)}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \frac{e^{2n} - 1}{2n(e^{2n} + 1)}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 K_n &= I_n - J_n \\
 &= 1 - \frac{e^{2n} - 1}{2n(e^{2n} + 1)}
 \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} - 1}{2n(e^{2n} + 1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 1$$

となる。

(答)1

3

(i)

数学的帰納法を利用して、自然数 n に対し

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。 $n=1$ のとき

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^1 = \cos \theta + i \sin \theta$$

より①をみたす。 $n=k$ のとき①をみたすと仮定すると

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$$

が成り立つ。このとき

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= \{\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)\}(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos(k\theta)\cos \theta - \sin(k\theta)\sin \theta + i\{\cos(k\theta)\sin \theta + \sin(k\theta)\cos \theta\} \\ &= \cos(k\theta + \theta) + i \sin(k\theta + \theta) \\ &= \cos\{(k+1)\theta\} + i \sin\{(k+1)\theta\} \end{aligned}$$

より $n=k+1$ のときも①をみたす。よってすべての自然数 n に対し

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

が成り立つ。

(証明終)

(ii)

m を整数とすると

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow n\theta &= \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{n} \left(\frac{1}{2} + m \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{\pi}{n} \left(\frac{1}{2} + m \right) \quad (m \text{ は整数})$$

(iii)

①において $n=5$ とすると

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) + i \sin(5\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^5 \\ &= (\cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta) \\ &\quad + i(5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta) \end{aligned}$$

となる。ここで実数部分を比較すると

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &= t^5 - 10t^3(1-t^2) + 5t(1-t^2)^2 \\ &= 16t^5 - 20t^3 + 5t \end{aligned}$$

となる。よって

$$f(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$$

となる。

$$(\text{答}) 16t^5 - 20t^3 + 5t$$

(iv)

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(5\theta) = 0$$

なので、(ii)の結果において $n=5$ とすると

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{5} \left(\frac{1}{2} + m \right) \\ &= \frac{(2m+1)\pi}{10} \end{aligned}$$

となる。ここで $0 \leq \theta \leq \pi$ より

$$\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3}{10}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{10}\pi, \frac{9}{10}\pi$$

となる。よって求める解を大きい順に並べると

$$\cos \theta = \cos \frac{\pi}{10}, \cos \frac{3}{10}\pi, 0, \cos \frac{7}{10}\pi, \cos \frac{9}{10}\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \cos \frac{\pi}{10}, \cos \frac{3}{10}\pi, 0, \cos \frac{7}{10}\pi, \cos \frac{9}{10}\pi$$

(v)

$\cos \frac{3}{10}\pi$ は $f(t) = 0$ の2番目に大きい解であるので、すなわち t に関する方程式

$$16t^5 - 20t^3 + 5t = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

の2番目に大きい解である。②は

$$t(16t^4 - 20t^2 + 5) = 0$$

と変形でき、また

$$\begin{aligned} 16t^4 - 20t^2 + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{10 \pm \sqrt{20}}{16} \\ \therefore t &= \pm \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned}$$

より、②の解は

$$t = 0, \pm \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}$$

となる。この中で2番目に大きいのは $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ であるので

$$\cos \frac{3}{10}\pi = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

4

(i)

2直線 ℓ, m が x 軸となす角はともに 30° であるので

$$\angle AOB = 60^\circ$$

となる。また、 $\triangle ABC$ は正三角形であるので

$$\angle ACB = 60^\circ$$

となる。2点 O, C は直線 AB に関して同じ側にあるので、円周角の定理の逆より、4点

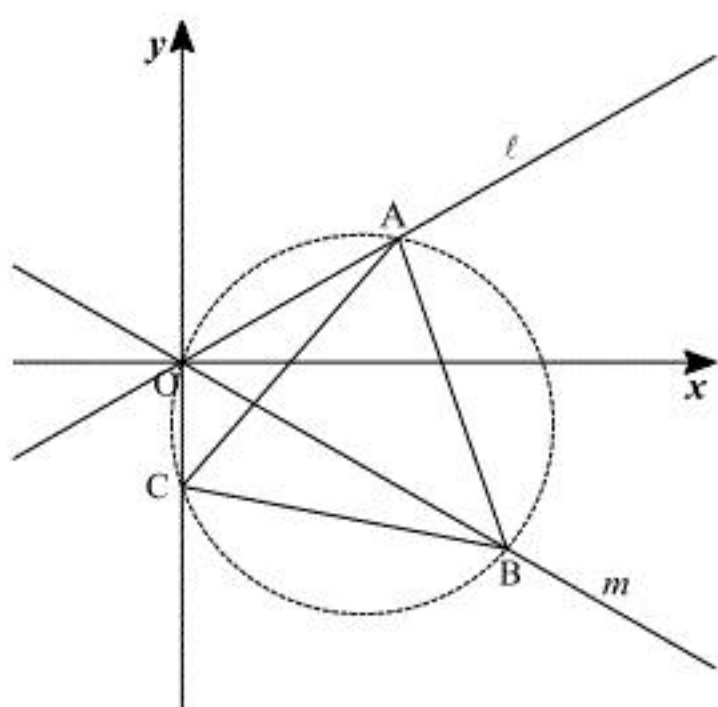
O, A, B, C は同一円周上になる。次に点 C が y 軸上にあることを示す。

[1] $s=t$ のとき

点 C が点 O に一致するので、点 C は y 軸上にある。

[2] $s < t$ のとき

点 C は直線 m に関して点 A と反対側にあるので、図は以下のようになる。



円周角の定理より

$$\angle COB = \angle CAB = 60^\circ$$

となる。また、 y 軸と直線 m のなす角も 60° である。よって点 C は y 軸上にある。

[3] $s > t$ のとき

[2]と同様にして考えると、点 C は y 軸上にある。

以上[1], [2], [3]より、点 C は y 軸上にある。

(証明終)

(ii)

点 C の座標を $(0, c)$ とすると、 $AC = BC$ より

$$(\sqrt{3}s)^2 + (s-c)^2 = (\sqrt{3}t)^2 + (-t-c)^2$$

$$\Leftrightarrow 4s^2 - 2sc + c^2 = 4t^2 + 2tc + c^2$$

$$\Leftrightarrow 2c(s+t) = 4(s^2 - t^2)$$

$$\therefore c = 2(s-t) \quad (\because s+t > 0)$$

となる。

(答) $2(s-t)$

(iii)

線分 AB の中点を M とすると、点 M の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(s+t), \frac{1}{2}(s-t)\right)$ となる。点 M は線分 CD

の中点でもあるので

$$\frac{0+X}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(s+t)$$

$$\therefore X = \sqrt{3}(s+t)$$

となり、

$$\frac{2(s-t)+Y}{2} = \frac{1}{2}(s-t)$$

$$\therefore Y = -(s-t)$$

となる。

(答) $\begin{cases} X = \sqrt{3}(s+t) \\ Y = -(s-t) \end{cases}$

(iv)

三平方の定理より

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left\{\sqrt{3}(s-t)\right\}^2 + \left\{s-(-t)\right\}^2} \\ &= \sqrt{3(s^2 - 2st + t^2) + (s^2 + 2st + t^2)} \\ &= \sqrt{4s^2 - 4st + 4t^2} \\ &= 2\sqrt{s^2 - st + t^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $2\sqrt{s^2 - st + t^2}$

(v)

(iv)より

$$2\sqrt{s^2 - st + t^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore s^2 - st + t^2 = \frac{3}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、点 D の座標を s, t で表した式

$$\begin{cases} X = \sqrt{3}(s+t) \\ Y = -(s-t) \end{cases}$$

を s, t について解くと

$$\begin{cases} s = \frac{X - \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}} \\ t = \frac{X + \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

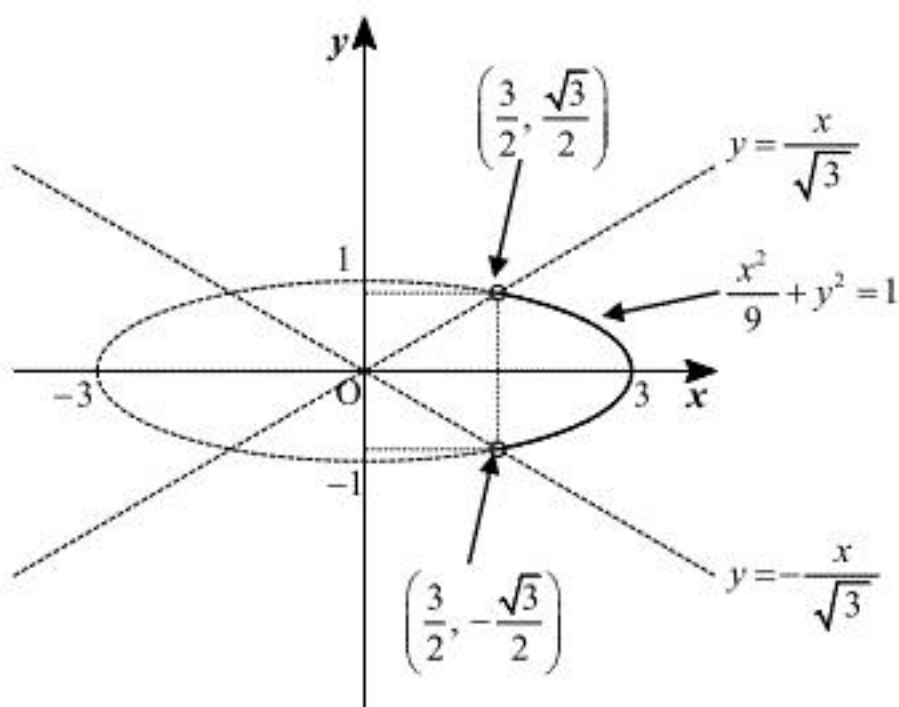
となる。これを①に代入すると

$$\begin{aligned} &\left(\frac{X - \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{X - \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{X + \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}} + \left(\frac{X + \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow &\frac{X^2 - 2\sqrt{3}XY + 3Y^2}{12} - \frac{X^2 - 3Y^2}{12} + \frac{X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2}{12} = \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow &X^2 + 9Y^2 = 9 \\ \therefore &\frac{X^2}{9} + Y^2 = 1 \end{aligned}$$

となる。また、 $s > 0, t > 0$ より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{X - \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}} > 0 \\ \frac{X + \sqrt{3}Y}{2\sqrt{3}} > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} X > \sqrt{3}Y \\ \sqrt{3}Y > -X \end{cases} \\ \therefore &-\frac{X}{\sqrt{3}} < Y < \frac{X}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる。よって点 D の軌跡の方程式は $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \left(-\frac{x}{\sqrt{3}} < y < \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ となり、図は以下のようになる。



(答)前図の太線部。ただし、境界上の点は含まない。