

数 学

昼間・前期日程

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題用紙は4ページで、問題は4問あります。全問に解答しなさい。
解答は解答用紙に記入しなさい。表面に書ききれない場合は、裏面を使用して
もよいが、その場合は必ず表面に「裏面に続く」と記入しなさい。
3. 解答用紙は4枚(その1～その4)あります。
4. 受験番号を、すべての解答用紙の受験番号欄(1枚につき2ヵ所)に正確に記入
しなさい。
5. 試験中に問題用紙及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、汚れ等に
気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 試験時間は120分です。
7. 試験終了時に、監督者の指示に従って、すべての解答用紙を提出しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1 関数

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2\sin x} \quad (0 < x < \pi)$$

について以下の問いに答えよ。(配点 50)

- (i) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ.
- (ii) $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ. さらに, $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ. ただし, グラフの凹凸は調べなくてよい.
- (iii) $0 < x < \pi$ のとき, $\frac{d}{dx} \{ \log(1 - \cos x) - \log(1 + \cos x) \}$ を求めよ.
- (iv) 定積分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(x) dx$ を求めよ.

2

関数

$$y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$$

について以下の問いに答えよ。(配点 50)

(i) 定積分 $I = \int_{-1}^1 y \, dx$ を求めよ.

以下では, n は自然数とする.

(ii) $I_n = \frac{1}{n} \int_{-n}^n y \, dx$ を求めよ.

(iii) $J_n = \frac{1}{n} \int_{-n}^n y(1-y) \, dx$ を求めよ.

(iv) $K_n = \frac{1}{n} \int_{-n}^n y^2 \, dx$ とおくとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ を求めよ.

3 以下の問いに答えよ。(配点 50)

(i) 自然数 n に対して,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法により証明せよ。ただし,
 i は虚数単位とする。

(ii) $\cos(n\theta) = 0$ をみたすような θ をすべて求めよ。

(iii) $t = \cos \theta$ とする。(i) の等式を使って, $\cos 5\theta = f(t)$ をみたす多項式
 $f(t)$ を求めよ。

(iv) $f(t) = 0$ のすべての解を $\cos \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) の形で表せ。また,
それらを大きい順に並べよ。

(v) $\cos \frac{3}{10}\pi$ を求めよ。

4

座標平面上の2つの直線 ℓ, m を、それぞれ

$$\ell : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, \quad m : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

とし、 ℓ 上に点 $A(\sqrt{3}s, s)$ を、 m 上に点 $B(\sqrt{3}t, -t)$ をとる。ただし、 $s > 0, t > 0$ とする。さらに、正三角形 ABC を、頂点 C が直線 AB に関して原点 O と同じ側になるように定める。このとき、以下の問いに答えよ。(配点 50)

- (i) 点 O, A, B, C が同一円周上にあることを示し、点 C が y 軸上にあることを証明せよ。
- (ii) 点 C の y 座標を s, t の式で表せ。
- (iii) 点 $D(X, Y)$ を、直線 AB に関して点 C と対称な点とする。このとき、 X と Y をそれぞれ s, t の式で表せ。
- (iv) 線分 AB の長さを s, t の式で表せ。
- (v) 点 A, B が線分 AB の長さを $\sqrt{3}$ に保ちながら動くとき、点 D の軌跡を求め、その概形を図示せよ。

