

(i)

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \text{ について}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{e^x + 2} \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

(ii)

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \text{ の導関数 } f'(x) \text{ は}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{e^x(e^x + 2) - e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^2} \\ &= \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2}\end{aligned}$$

となり、第2次導関数 $f''(x)$ は

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{4e^x \cdot (e^x + 2)^2 - 2(e^x + 2)e^x \cdot 4e^x}{(e^x + 2)^4} \\ &= \frac{4e^x \{(e^x + 2) - 2e^x\}}{(e^x + 2)^3} \\ &= \frac{4e^x(2 - e^x)}{(e^x + 2)^3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2}, \quad f''(x) = \frac{4e^x(2 - e^x)}{(e^x + 2)^3}$$

(iii)

曲線 $C: y = f(x)$ の変曲点の x 座標は、その前後で $f''(x)$ の符号が変化する x の値である。(ii)

の結果より

$$\begin{aligned}f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4e^x(2 - e^x)}{(e^x + 2)^3} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \log 2\end{aligned}$$

であり

$$x < \log 2 \text{ のとき } f''(x) > 0$$

$$x > \log 2 \text{ のとき } f''(x) < 0$$

となるから、曲線 C の変曲点の x 座標は $\log 2$ となり、 y 座標は

$$\begin{aligned}y &= f(\log 2) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (\log 2, 0)$$

(iv)

(ii)の結果より

$$\begin{aligned}f'(\log 2) &= \frac{4 \cdot 2}{(2 + 2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

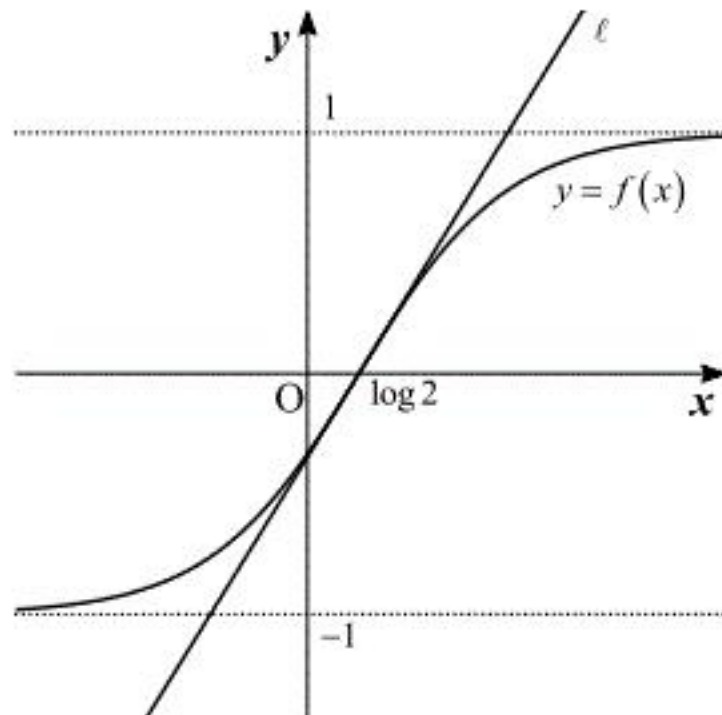
であるから、曲線 C の変曲点 $(\log 2, 0)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned}y &= f'(\log 2)(x - \log 2) + 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}(x - \log 2)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{2}(x - \log 2)$$

(v)

(i)より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ であることから、(iii)の増減表と合わせて考えると、 $y = f(x)$ および変曲点 $(\log 2, 0)$ における接線 ℓ のグラフは下図のようになる。曲線 C 、 y 軸および接線 ℓ で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\log 2} \left\{ f(x) - \frac{1}{2}(x - \log 2) \right\} dx \\ &= \int_0^{\log 2} \left\{ 1 - \frac{4}{e^x + 2} - \frac{1}{2}(x - \log 2) \right\} dx \\ &= \left[x - \frac{1}{4}(x - \log 2)^2 \right]_0^{\log 2} - 4 \int_0^{\log 2} \frac{1}{e^x + 2} dx \\ &= \log 2 + \frac{1}{4}(\log 2)^2 - 4 \int_0^{\log 2} \frac{1}{e^x + 2} dx\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_0^{\log 2} \frac{dx}{e^x + 2}$ について $t = e^x + 2$ とおくと、 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-2}$ であることより

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} \frac{dx}{e^x + 2} &= \int_3^4 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t-2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \frac{t-2}{t} \right]_3^4 \\ &= \frac{1}{2} (\log 3 - \log 2)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}S &= \log 2 + \frac{1}{4}(\log 2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} (\log 3 - \log 2) \\ &= \frac{1}{4}(\log 2)^2 + 3 \log 2 - 2 \log 3\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{4}(\log 2)^2 + 3 \log 2 - 2 \log 3$$

2

(i)

$y = x\sqrt{4-x^2}$ ($0 \leq x \leq 2$) について、 $y \geq 0$ であるから

$$y = x\sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2(4-x^2) \quad \dots \textcircled{1}$$

となり、 $x = \sqrt{4-y^2}$ ($0 \leq y \leq 2$) について、 $x \geq 0$ であるから

$$x = \sqrt{4-y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4-y^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②より、曲線 $C_1: y = x\sqrt{4-x^2}$ ($0 \leq x \leq 2$) と曲線 $C_2: x = \sqrt{4-y^2}$ ($0 \leq y \leq 2$) の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 &= 4-x^2(4-x^2) \\ \Leftrightarrow x^2-4-x^2(x^2-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=1, 2 \quad (\because 0 \leq x \leq 2) \end{aligned}$$

となる。よって、 C_1 と C_2 の共有点の座標は $(1, \sqrt{3}), (2, 0)$ である。

(答) $(1, \sqrt{3}), (2, 0)$

(ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt{4-x^2} \\ &= \sqrt{4x^2-x^4} \\ &= \sqrt{-(x^2-2)^2+4} \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq x \leq 2$ であるから、 $x^2=2$ 、つまり、 $x=\sqrt{2}$ のとき $f(x)$ は最大値 2 をとる。

(答) $M=2$

(iii)

$C_1: y = x\sqrt{4-x^2}$ ($0 \leq x \leq 2$) と x 軸の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x\sqrt{4-x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow x\sqrt{(2+x)(2-x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow x=0, 2 \quad (\because 0 \leq x \leq 2) \end{aligned}$$

であり、 $0 < x < 2$ のとき $x\sqrt{4-x^2} > 0$ となるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left\{ -\frac{1}{2}(4-x^2) \right\}' (4-x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{8}{3}$

(iv)

C_1 上に存在する点 (x, y) について、①より

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2(4-x^2) \\ \Leftrightarrow y^2 &= -x^4+4x^2 \\ \Leftrightarrow (x^2-2)^2 &= 4-y^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

[1] $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ のとき

$x^2-2 \leq 0$ であるから

$$\begin{aligned} x^2-2 &= -\sqrt{4-y^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2-\sqrt{4-y^2} \end{aligned}$$

となる。

[2] $\sqrt{2} < x \leq 2$ のとき

$x^2-2 > 0$ であるから

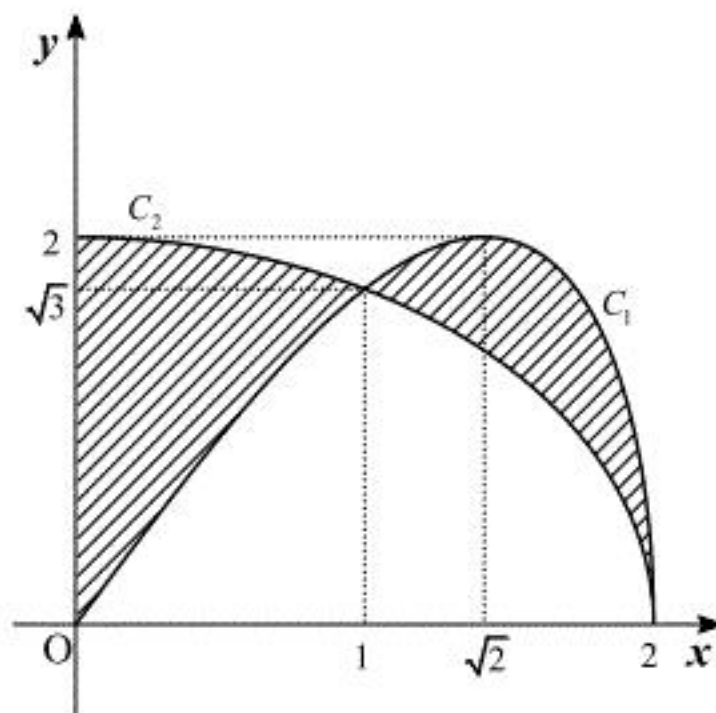
$$\begin{aligned} x^2-2 &= \sqrt{4-y^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2+\sqrt{4-y^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $x^2 = 2 - \sqrt{4-y^2}$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2}$), $x^2 = 2 + \sqrt{4-y^2}$ ($\sqrt{2} < x \leq 2$)

(v)

以上の結果より、曲線 C_1, C_2 の概形は下図のようになる。



上図の斜線部を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \left(2 + \sqrt{4-y^2} \right) - \left(4-y^2 \right) + \left(2 - \sqrt{4-y^2} \right) \right\} dy \\ &\quad + \pi \int_{\sqrt{3}}^2 \left\{ \left(2 + \sqrt{4-y^2} \right) - \left(2 - \sqrt{4-y^2} \right) + \left(4-y^2 \right) \right\} dy \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 dy + \pi \int_{\sqrt{3}}^2 (4-y^2) dy + 2\pi \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-y^2} dy \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-y^2} dy$ について、 $y = 2 \sin \theta$ とおくと $\frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-y^2} dy &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 dy + \pi \int_{\sqrt{3}}^2 (4-y^2) dy + 2\pi \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-y^2} dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{3}} + \pi \left[4y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{\sqrt{3}}^2 + 2\pi \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \sqrt{3}\pi + 4\pi(2-\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\pi(8-3\sqrt{3}) + \frac{2}{3}\pi^2 - \sqrt{3}\pi \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 + \frac{16}{3}\pi - 3\sqrt{3}\pi \\ &= \pi \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{16}{3} - 3\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

である。

(答) $V = \pi \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{16}{3} - 3\sqrt{3} \right)$

(i)

すべての自然数 n に対して

$$a_n < n \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = 0 < 1$$

となるから①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定するとき

$$a_k < k \text{ であるもとで}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2k(k+1)}{3k-a_k} \\ &< \frac{2k(k+1)}{3k-k} \\ &= k+1 \end{aligned}$$

となるから $n=k+1$ のときも①は成り立つ。以上, [1], [2] より, すべての自然数 n について $a_n < n$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(ii)

数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{n}{n-a_n}$ で定めるとき

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{n+1}{n+1-a_{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{n+1-\frac{2n(n+1)}{3n-a_n}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{2n}{3n-a_n}} \\ &= \frac{3n-a_n}{n-a_n} \\ &= 1 + 2 \frac{n}{n-a_n} \\ &= 2b_n + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_{n+1} = 2b_n + 1$

(iii)

$$b_1 = \frac{1}{1-a_1} = 1$$

である。よって, (ii) の結果を用いて

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + 1 &= 2(b_n + 1) \\ \Leftrightarrow b_n + 1 &= 2^{n-1}(b_1 + 1) \\ \Leftrightarrow b_n &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_n = 2^n - 1$

(iv)

 $b_n = 2^n - 1$ より $b_n > 0$ であるから

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n}{n-a_n} \\ \Leftrightarrow b_n(n-a_n) &= n \\ \Leftrightarrow a_nb_n &= n(b_n-1) \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{n(b_n-1)}{b_n} \end{aligned}$$

となる。よって, (iii) の結果を用いて

$$a_n = \frac{2n(2^{n-1}-1)}{2^n-1}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{2n(2^{n-1}-1)}{2^n-1}$

(v)

(iv) の結果より

$$\frac{a_n}{n} = \frac{2^n-2}{2^n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

となり, $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ であることから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \frac{1-0}{1-0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{n!} &= \frac{2(2-1)}{2^2-1} \cdot \frac{2(2^2-1)}{2^3-1} \cdot \frac{2(2^3-1)}{2^4-1} \cdots \frac{2(2^{n-1}-1)}{2^n-1} \\ &= \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{n!} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{n!} = \frac{1}{2}$

(i)

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \text{であるとき}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、行列 $\begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{pmatrix}$ を A' とおき、 A' に逆行列 A'^{-1} が存在すると仮定すると、

①の両辺に左から A'^{-1} を乗じて

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり不合理であるから、 A' に逆行列は存在しない。よって

$$\det A' = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-k)(1-k) - 1 \cdot (-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

である。このとき、①より

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+a \\ -1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

となる。

(答) $a = -1, k = 2$

(ii)

$$AP = P\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} q+3 & 3p \\ q-1 & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1+pr \\ qr & q \end{pmatrix}$$

であるから、 $AP = P\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ を満たすとき

$$q+3 = r \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$3p = 1+pr \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$q-1 = qr \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$-p = q \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

が成り立つ。②、④より

$$q-1 = q(q+3)$$

$$\Leftrightarrow (q+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = -1$$

となり、②より $r = 2$ 、⑤より $p = 1$ となる。このとき、④も成り立つから、求める実数 p, q, r の値は $(p, q, r) = (1, -1, 2)$ となる。

(答) $(p, q, r) = (1, -1, 2)$

(iii)

自然数 n に対して、行列 $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の n 個の積 B^n が

$$B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n \cdot \alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

となることを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\textcircled{6} \text{の右辺} = \begin{pmatrix} \alpha^1 & 1 \cdot \alpha^{1-1} \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = B$$

となるから⑥は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき⑥が成り立つと仮定する

このとき

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & k \cdot \alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$$

が成り立ち

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha^k & k \cdot \alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^k \cdot \alpha & \alpha^k + k \cdot \alpha^{k-1} \cdot \alpha \\ 0 & \alpha^k \cdot \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & (k+1)\alpha^k \\ 0 & \alpha^{k+1} \end{pmatrix}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも⑥は成り立つ。

以上、[1], [2]より、すべての自然数 n に対して $B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n \cdot \alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ となることが示された。

(証明終)

(iv)

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列は $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。 $AP = P\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ の両辺に右から P^{-1} を乗じると

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

となるから

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} \cdot P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} \cdots P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

である。(iii)の結果より

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

となるから

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & (n+2) \cdot 2^{n-1} \\ -2^n & -n \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (n+2) \cdot 2^{n-1} & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -(n-2) \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

である。

$$(答) A^n = \begin{pmatrix} (n+2) \cdot 2^{n-1} & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -(n-2) \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

(v)

$A^n = x_n A + y_n E$ となるとき

$$\begin{pmatrix} (n+2) \cdot 2^{n-1} & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -(n-2) \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + y_n & x_n \\ -x_n & x_n + y_n \end{pmatrix}$$

となるから

$$(n+2)2^{n-1} = 3x_n + y_n \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$n \cdot 2^{n-1} = x_n \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$-n \cdot 2^{n-1} = -x_n \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$$-(n-2) \cdot 2^{n-1} = x_n + y_n \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

が成り立つ。⑧、⑨は同じ式であり

$$x_n = n \cdot 2^{n-1}$$

となり、これを⑥と⑨に代入すると、ともに

$$y_n = -(n-1) \cdot 2^n$$

となるから、 $A^n = x_n A + y_n E$ となるとき、 $x_n = n \cdot 2^{n-1}$ 、 $y_n = -(n-1) \cdot 2^n$ である。

$$(答) x_n = n \cdot 2^{n-1}, y_n = -(n-1) \cdot 2^n$$