

1

(i)

$f(x) = x + \sin 2x$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x) = 1 + 2 \cos 2x$$

となるから、曲線 C 上の点 $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} + 1 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\ell: y = x + 1$

(ii)

$0 \leq x \leq \pi$ より $0 \leq 2x \leq 2\pi$ であるから、(I) より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \cos 2x \\ &= 2 \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

であり、ここで、

$$\cos 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{3}$ で極大、 $x = \frac{2}{3}\pi$ で極小となり、このとき

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

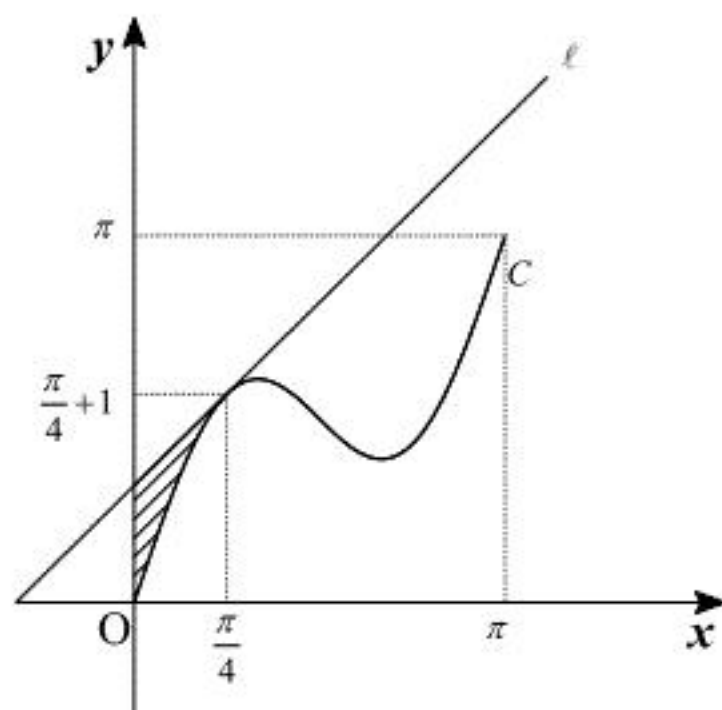
$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{4}{3}\pi \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) 極大値 $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($x = \frac{\pi}{3}$), 極小値 $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($x = \frac{2}{3}\pi$)

(iii)

曲線 C 、および接線 ℓ を図示すると以下のようになる。



上図より、求める面積 S は斜線部分の面積であり、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(x+1) - (x + \sin 2x)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2x) dx \\ &= \left[x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(iv)

部分積分法を用いて、

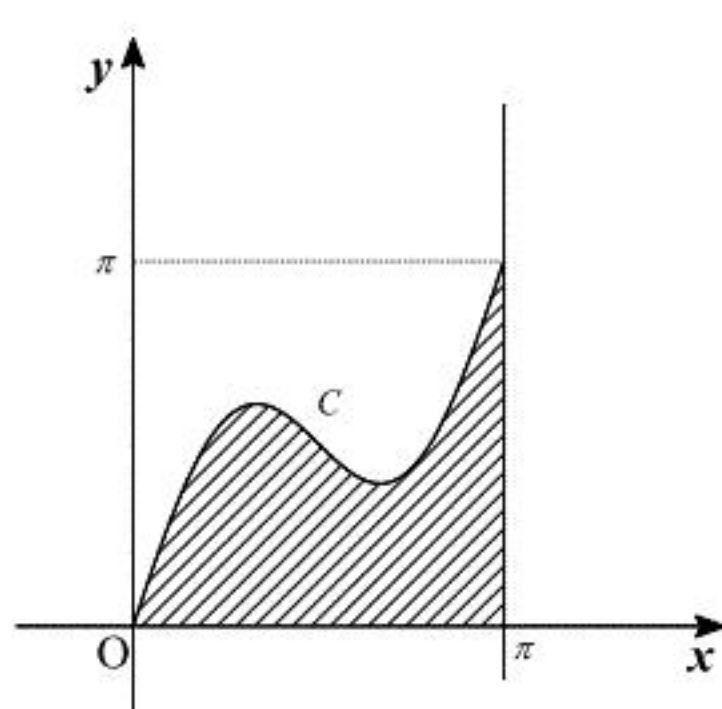
$$\begin{aligned} \int x \sin 2x dx &= \int x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right)' dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x - \int x' \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$

(v)

曲線 C 、 x 軸および $x = \pi$ で囲まれた図形は以下の図の斜線部である。



よって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} (x + \sin 2x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} (x^2 + \sin^2 2x + 2x \sin 2x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \left(x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x + 2x \sin 2x \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + 2 \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \right]_0^{\pi} \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} \pi^3 + \frac{\pi}{2} - \pi \right) \\ &= \frac{\pi^4}{3} - \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi^4}{3} - \frac{\pi^2}{2}$

2

(i)

$f(t) = g(t)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t) \\ \Leftrightarrow (t-1)e^{-t} &= (t-1)^2 e^{-t} \\ \Leftrightarrow (t-1)(t-2)e^{-t} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $e^{-t} > 0$ であるから

$$t = 1, 2$$

であり、これらは $1 \leq t \leq 3$ を満たす。よって、 $\alpha < \beta$ より

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

である。

(答) $\alpha = 1, \beta = 2$

また、 $h(t) = f(t) - g(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} h(t) &= (t-1)e^{-t} - (t-1)^2 e^{-t} \\ &= (t-1)(2-t)e^{-t} \end{aligned}$$

となり、 $\alpha \leq t \leq \beta$ 、すなわち $1 \leq t \leq 2$ であることから、

$$\begin{cases} t-1 \geq 0 \\ 2-t \geq 0 \\ e^{-t} > 0 \end{cases}$$

である。よって、 $\alpha \leq t \leq \beta$ のとき $h(t) \geq 0$ となるから、

$$f(t) \geq g(t)$$

である。

(証明終)

(ii)

$f'(t), g'(t)$ をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left\{ (t-1)e^{-t} \right\}' \\ &= e^{-t} - (t-1)e^{-t} \\ &= (2-t)e^{-t} \\ g'(t) &= \left\{ (t-1)^2 e^{-t} \right\}' \\ &= 2(t-1)e^{-t} - (t-1)^2 e^{-t} \\ &= -(t^2 - 4t + 3)e^{-t} \\ &= (3-t)(t-1)e^{-t} \end{aligned}$$

となる。

(答) $f'(t) = (2-t)e^{-t}, g'(t) = (3-t)(t-1)e^{-t}$

また、 $1 \leq t \leq 2$ の範囲において常に

$$f'(t) \geq 0$$

$$g'(t) \geq 0$$

であるから、 $\alpha \leq t \leq \beta$ において $f(t), g(t)$ は単調増加する。

(証明終)

(iii)

I_1, I_2, I_3 をそれぞれ部分積分法を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 u e^{-2u} du \\ &= \int_0^1 u \left(-\frac{1}{2} e^{-2u} \right)' du \\ &= \left[-\frac{1}{2} u e^{-2u} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2u} du \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2u} \right]_0^1 \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} e^{-2} \\ I_2 &= \int_0^1 u^2 e^{-2u} du \\ &= \int_0^1 u^2 \left(-\frac{1}{2} e^{-2u} \right)' du \\ &= \left[-\frac{1}{2} u^2 e^{-2u} \right]_0^1 + \int_0^1 u e^{-2u} du \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} + I_1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{5}{4} e^{-2} \\ I_3 &= \int_0^1 u^3 e^{-2u} du \\ &= \int_0^1 u^3 \left(-\frac{1}{2} e^{-2u} \right)' du \\ &= \left[-\frac{1}{2} u^3 e^{-2u} \right]_0^1 + \frac{3}{2} \int_0^1 u^2 e^{-2u} du \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{3}{2} I_2 \\ &= \frac{3}{8} - \frac{19}{8} e^{-2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $I_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} e^{-2}, I_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} e^{-2}, I_3 = \frac{3}{8} - \frac{19}{8} e^{-2}$

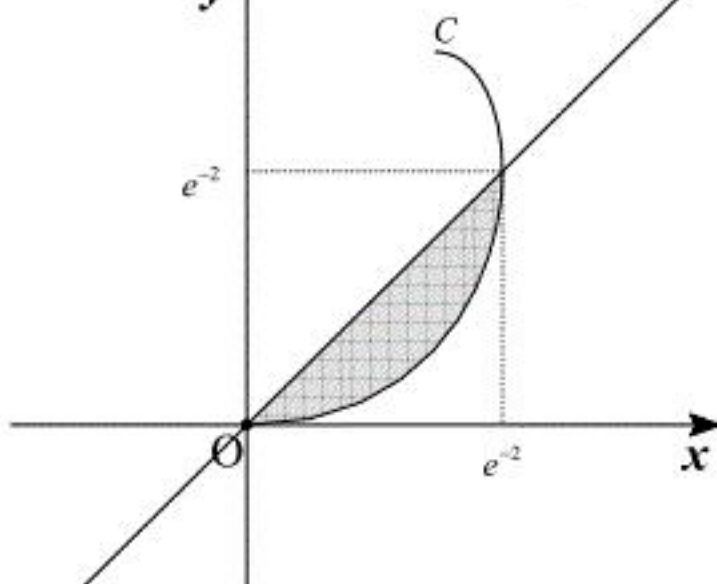
(iv)

$f(t), g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	1	...	2	...	3
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\rightarrow$		$\leftarrow$	
$g'(t)$	0	+		+	0
$g(t)$		$\uparrow$		$\uparrow$	
(x, y)	(0, 0)	$\nearrow$	(e^{-2}, e^{-2})	$\nwarrow$	$(2e^{-3}, 4e^{-3})$

また $1 < t < 2$ のとき、(i)の結果より $x > y$ である。よって、曲線 C と直線 $y = x$ の位置関係は下

図のようになる。



S は図の斜線部分の面積であり、曲線 C の方程式は

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{e^{-2}} (x-y) dx \\ &= \int_0^{e^{-2}} x dx - \int_0^{e^{-2}} y dx \end{aligned}$$

となる。ここで $I = \int_0^{e^{-2}} y dx$ とおき、 $x = f(t)$ と置換すると、

$$\frac{dx}{dt} = f'(t)$$

であり、 x と t は以下のように対応する。

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \rightarrow & e^{-2} \\ \hline t & 1 & \rightarrow & 2 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 g(t) \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_1^2 g(t) f'(t) dt \\ &= \int_1^2 (t-1)^2 (2-t) e^{-2t} dt \end{aligned}$$

となり、さらに $t-1=u$ とおくと、

$$\frac{dt}{du} = 1$$

であり、 t と u は以下のように対応する。

$$\begin{array}{c|ccc} t & 1 & \rightarrow & 2 \\ \hline u & 0 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 u^2 (1-u) e^{-2u-2} du \\ &= e^{-2} \int_0^1 (u^2 e^{-2u} - u^3 e^{-2u}) du \\ &= e^{-2} (I_2 - I_3) \\ &= e^{-2} \left(-\frac{1}{8} + \frac{9}{8} e^{-2} \right) \\ &= -\frac{1}{8} e^{-2} + \frac{9}{8} e^{-4} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{e^{-2}} x dx - I \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{e^{-2}} - \left(-\frac{1}{8} e^{-2} + \frac{9}{8} e^{-4} \right) \\ &= \frac{1}{8} e^{-2} - \frac{5}{8} e^{-4} \end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{1}{8} e^{-2} - \frac{5}{8} e^{-4}$

3

(i) $x \rightarrow \infty$ としたときの極限值は

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。また $x \rightarrow -\infty$ とするとき、 $t = -x$ とおくと $t \rightarrow \infty$ であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \\ &= -1\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

(ii)

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

となることに注意し、 $f'(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' \\ &= \frac{(x+1)' \sqrt{x^2+1} - (x+1) (\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\ &= \frac{(x^2+1) - x(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $f'(x) = 0$ とすると $x = 1$ であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって、 $f(x)$ は $x = 1$ のとき最大となり、このとき

$$f(1) = \frac{1+1}{\sqrt{1^2+1}} = \sqrt{2}$$

である。

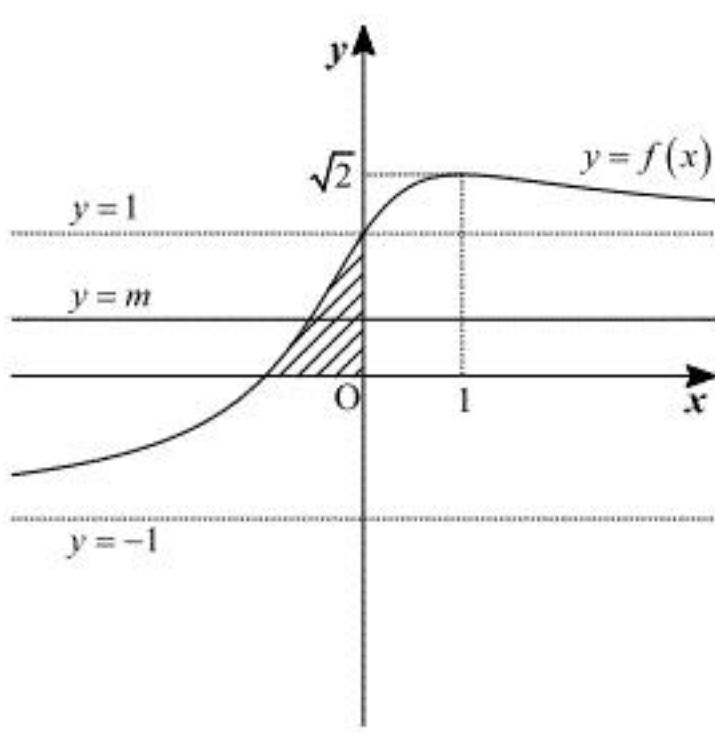
$$\text{(答)} \quad f'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{最大値 } \sqrt{2} \quad (x=1)$$

(iii)

すべての実数 x に対し $\sqrt{x^2+1} > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}m\sqrt{x^2+1} &= x+1 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \Leftrightarrow m &= f(x)\end{aligned}$$

と変形できる。この方程式がただ1つの実数解をもつための必要十分条件は、直線 $y = m$ と曲線 $y = f(x)$ がただ1つの共有点をもつことである。ここで、(ii)の増減表より $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、求める m の範囲は

$$-1 < m \leq 1, m = \sqrt{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad -1 < m \leq 1, m = \sqrt{2}$$

(iv)

$g'(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left\{ \log(x + \sqrt{x^2+1}) \right\}' \\ &= \frac{(x + \sqrt{x^2+1})'}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

となる。また、図形 D は(iii)の図の斜線部分であり、その面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_{-1}^0 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left\{ g'(x) + (\sqrt{x^2+1})' \right\} dx \\ &= \left[g(x) + \sqrt{x^2+1} \right]_{-1}^0 \\ &= \log 1 + 1 - \log(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} \\ &= 1 - \sqrt{2} - \log(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad S = 1 - \sqrt{2} - \log(\sqrt{2}-1)$$

(v)

図形 D を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-1}^0 \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^0 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx \\ &= \pi \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^0 \left\{ 1 + \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \right\} dx \\ &= \pi \left[x + \log(x^2+1) \right]_{-1}^0 \\ &= -\pi(-1 + \log 2) \\ &= \pi(1 - \log 2)\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad V = \pi(1 - \log 2)$$

(i)

数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公差 d の等差数列であるから, 一般項は

$$a_n = 1 + (n-1)d$$

となる。よって, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= a_n a_{n+p} \\ &= \{1 + (n-1)d\} \{1 + (n+p-1)d\} \\ &= 1 + (2n+p-2)d + (n-1)(n+p-1)d^2 \end{aligned}$$

と表されるから, 数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} c_n &= b_{n+1} - b_n \\ &= \{(2n+2+p-2) - (2n+p-2)\}d + \{n(n+1+p-1) - (n-1)(n+p-1)\}d^2 \\ &= 2d + (2n+p-1)d^2 \end{aligned}$$

となる。このとき,

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \{(2n+2+p-1) - (2n+p-1)\}d^2 \\ &= 2d^2 \end{aligned}$$

であり, これは n に依らない定数であるから, 数列 $\{c_n\}$ は等差数列である。

(証明終)

また, 数列 $\{c_n\}$ の初項 c_1 と公差 D を求めると,

$$\begin{aligned} c_1 &= 2d + (2+p-1)d^2 \\ &= 2d + (p+1)d^2 \\ D &= 2d^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $c_1 = 2d + (p+1)d^2, D = 2d^2$

(ii)

与式の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} C \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+p}} \right) &= C \cdot \frac{a_{n+p} - a_n}{a_n a_{n+p}} \\ &= C \cdot \frac{(n+p-1)d - (n-1)d}{b_n} \\ &= \frac{Cpd}{b_n} \end{aligned}$$

となる。ここで, 与式の左辺と係数を比較すると,

$$Cpd = 1$$

となるから, $d > 0, p > 0$ より

$$C = \frac{1}{pd}$$

である。

(答) $C = \frac{1}{pd}$

(iii)

(i)の結果より,

$$\begin{cases} c_1 = 2d + (p+1)d^2 \\ c_2 - c_1 = D = 2d^2 \end{cases}$$

である。一方, 与えられた条件 $b_1 = 7, b_2 = 40, b_3 = 91$ より,

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_1 = 33 \\ c_2 &= b_3 - b_2 = 51 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} 33 = 2d + (p+1)d^2 \\ 51 - 33 = 2d^2 \end{cases}$$

となる。ここで, 第 2 式を変形すると, d が正の定数であることから

$$\begin{aligned} d^2 &= 9 \\ \therefore d &= 3 \quad (\because d > 0) \end{aligned}$$

となる。これを第 1 式に代入すると,

$$\begin{aligned} 33 &= 2 \cdot 3 + (p+1) \cdot 3^2 \\ \therefore p &= 2 \end{aligned}$$

であり, これは p が自然数であるといった条件を満たす。これらを (i) で求めた $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項の式に代入すると,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 3(n-1) \\ &= 3n - 2 \\ b_n &= 1 + 3(2n+2-2) + 9(n-1)(n+2-1) \\ &= 9n^2 + 6n - 8 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $d = 3, p = 2, a_n = 3n - 2, b_n = 9n^2 + 6n - 8$

(iv)

(ii), (iii)の結果より,

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right)$$

となるから, 十分大きい n に対して

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+2}} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, 求める極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{24}$