

数 学

前期日程

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題用紙は4ページで、問題は4問あります。全問に解答しなさい。
解答は解答用紙に記入しなさい。表面に書ききれない場合は、裏面を使用して
もよいが、その場合は必ず表面に「裏面に続く」と記入しなさい。
3. 解答用紙は4枚(その1～その4)あります。
4. 受験番号を、すべての解答用紙の受験番号欄(1枚につき2カ所)に正確に記入
しなさい。
5. 試験中に問題用紙及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、汚れ等に
気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 試験時間は120分です。
7. 試験終了時に、監督者の指示に従って、すべての解答用紙を提出しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1

関数

$$f(x) = x + \sin 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

に対して，曲線 $C : y = f(x)$ を考える．以下の問いに答えよ．（配点 50）

- (i) 曲線 C 上の点 $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ における C の接線 ℓ の方程式を求めよ．
- (ii) 関数 $f(x)$ の増減を調べ， $f(x)$ の極値を求めよ．
- (iii) 曲線 C ， y 軸 および 接線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．
- (iv) 不定積分 $\int x \sin 2x \, dx$ を求めよ．ただし，積分定数は省略してもよい．
- (v) 曲線 C ， x 軸 および 直線 $x = \pi$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

2

関数 $f(t), g(t)$ を次のように定義する. ただし, e は自然対数の底とする.

$$f(t) = (t-1)e^{-t}, \quad g(t) = (t-1)^2e^{-t}$$

xy 平面上の曲線 C が, 媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (1 \leq t \leq 3)$$

と表されるとき, 以下の問いに答えよ. (配点 50)

(i) $f(t) = g(t)$ となる t の値を α, β ($\alpha < \beta$) とする. α, β の値を求めよ.

さらに, $\alpha \leq t \leq \beta$ のとき, $f(t) \geq g(t)$ であることを示せ.

(ii) 導関数 $f'(t), g'(t)$ をそれぞれ求めよ.

さらに, 区間 $\alpha \leq t \leq \beta$ において, 関数 $f(t), g(t)$ がともに単調に増加することを示せ.

(iii) 次の定積分をそれぞれ求めよ.

$$I_1 = \int_0^1 ue^{-2u} du, \quad I_2 = \int_0^1 u^2 e^{-2u} du, \quad I_3 = \int_0^1 u^3 e^{-2u} du$$

(iv) 曲線 C と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

3

次の関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して, 以下の問いに答えよ.

ただし, $\log x$ は e を底とする自然対数を表す. (配点 50)

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad g(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

- (i) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ をそれぞれ求めよ.
- (ii) 導関数 $f'(x)$ を求め, 関数 $f(x)$ の増減を調べよ. さらに, $f(x)$ の最大値を求めよ.
- (iii) 次の方程式がただ 1 つの実数解を持つような定数 m の条件を求めよ.
- $$m\sqrt{x^2+1} = x+1$$
- (iv) 導関数 $g'(x)$ を求めよ. さらに, xy 平面上において, 曲線 $y = f(x)$, x 軸および y 軸で囲まれた図形を D とする. 図形 D の面積 S を求めよ.
- (v) 図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

4

数列 $\{a_n\}$ は初項が $a_1 = 1$ ，公差が正の定数 d の等差数列とする．

このとき，自然数の定数 p を用いて

$$b_n = a_n a_{n+p} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる数列 $\{b_n\}$ について考える．ただし， $a_n a_{n+p}$ は a_n と a_{n+p} の積を表す．以下の問いに答えよ．（配点 50）

(i) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ が等差数列であることを示せ．

さらに，数列 $\{c_n\}$ の初項 c_1 と公差 D を d, p を用いて表せ．

(ii) ある定数 C を用いて

$$\frac{1}{b_n} = C \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+p}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表すことができる．このとき， C を d, p を用いて表せ．

以下の問いでは，数列 $\{b_n\}$ が初項から順に

$$b_1 = 7, \quad b_2 = 40, \quad b_3 = 91, \quad \dots$$

となる場合を考える．

(iii) 定数 d, p および 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(iv) 数列 $\{b_n\}$ に対して，

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく．極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ．

