

1

(i)

 $f(x) = x + 2\cos x$ であるから

$$f'(x) = 1 - 2\sin x$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = 1 - 2\sin x$$

(ii)

$0 \leq x \leq \pi$ で $f'(x) = 0$ となるのは、 $\sin x = \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のときである。よって、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲での $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$	$\searrow$	+	0	-	0	+	$\searrow$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$\pi - 2$

ここで、 $3 < \pi < \frac{7}{2}$ 、 $1 < \sqrt{3} < 2$ であることを考慮して

$$\begin{aligned} 2 - \left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} \right) &= 2 + \sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi \\ &> 2 + 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{12} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(0) > f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \right) - (\pi - 2) &= 2 + \sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi \\ &> 0 \end{aligned}$$

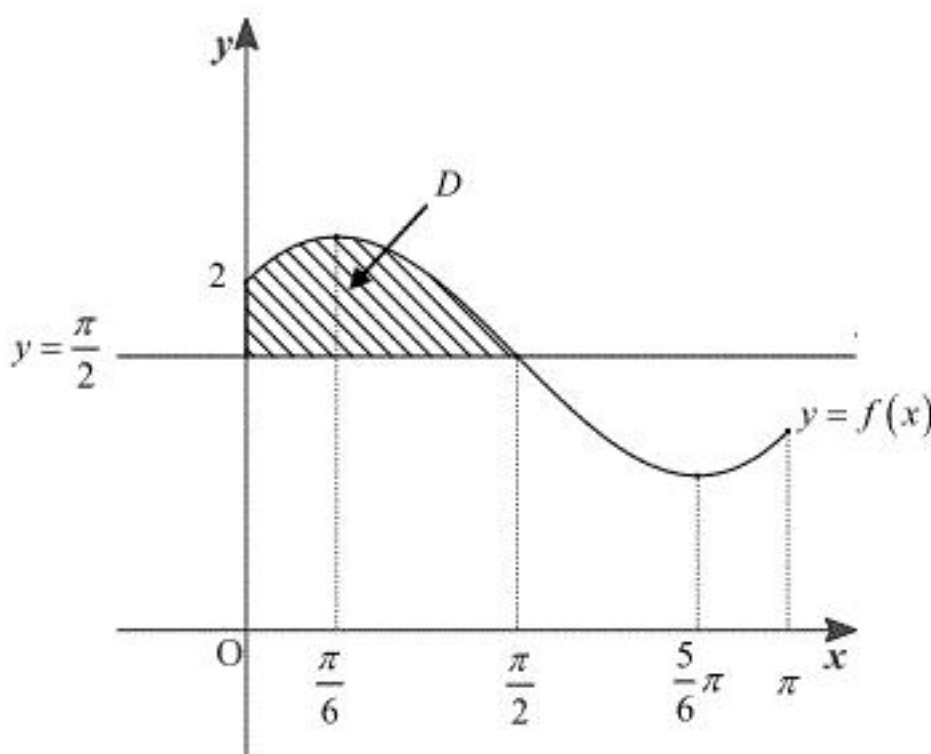
$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) > f(\pi)$$

であるから、 $M = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ 、 $m = f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad M = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}, m = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$$

(iii)

増減表と $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ であることを考慮すると、図形 D は以下の斜線部となる。



よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ (x + 2\cos x) - \frac{\pi}{2} \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2\sin x - \frac{\pi}{2}x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + 2 - \frac{\pi^2}{4} \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = 2 - \frac{\pi^2}{8}$$

(iv)

部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} I &= \int x \cos x dx \\ &= \int x (\sin x)' dx \\ &= x \sin x - \int (x)' \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

を得る。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad I = x \sin x + \cos x + C \quad (\text{積分定数は省略してもよい。})$$

(v)

(iii) の図より、 V は直線 $x = 0$ 、 $x = \frac{\pi}{2}$ 及び x 軸と $y = f(x)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1

回転してできる立体の体積から、底面の半径が $\frac{\pi}{2}$ 、高さが $\frac{\pi}{2}$ の円柱の体積を引いたものであるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 2\cos x)^2 dx - \pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 4x \cos x + 4\cos^2 x) dx - \frac{\pi^4}{8} \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + 4x \cos x + 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx - \frac{\pi^4}{8} \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 4x \cos x + 2\cos 2x + 2) dx - \frac{\pi^4}{8} \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x \sin x + 4\cos x + \sin 2x + 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^4}{8} \quad \left(\because \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C \right) \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{\pi^3}{24} + 2\pi + \pi \right) - 4 \right\} - \frac{\pi^4}{8} \\ &= -\frac{\pi^4}{12} + 3\pi^2 - 4\pi \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad V = -\frac{\pi^4}{12} + 3\pi^2 - 4\pi$$

2

(i)

 $f(x) = ax + xe^{-x}$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= a + e^{-x} - xe^{-x} \\ &= a + (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\ &= -(2-x)e^{-x} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = a + (1-x)e^{-x}, \quad f''(x) = -(2-x)e^{-x}$$

(ii)

$f''(x) = 0$ となるのは, $e^{-x} > 0$ より $x = 2$ のときである。これより $f'(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	2	...
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$	$a - \frac{1}{e^2}$	$\nearrow$

よって, A の x 座標は $x_0 = 2$ となる。また, 増減表より $f'(x)$ の最小値は $f'(2) = a - \frac{1}{e^2}$ である

から, すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ となるのは $a - \frac{1}{e^2} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{e^2}$ のときである。

$$(\text{答}) \quad x_0 = 2, \quad a > \frac{1}{e^2}$$

(iii)

(ii)より, 接線 l の接点は $A(2, f(2))$ であるから, 接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \\ \Leftrightarrow y - \left(2a + \frac{2}{e^2}\right) &= \left(a - \frac{1}{e^2}\right)(x - 2) \\ \Leftrightarrow y &= \left(a - \frac{1}{e^2}\right)x + \frac{4}{e^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad l: y = \left(a - \frac{1}{e^2}\right)x + \frac{4}{e^2}$$

(iv)

部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int xe^{-x} dx \\ &= \int x(-e^{-x})' dx \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C_1 \\ &= -(x+1)e^{-x} + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int x^2 e^{-x} dx \\ &= \int x^2 (-e^{-x})' dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2I_1 \\ &= -x^2 e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} + C_2 \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C_2 \end{aligned}$$

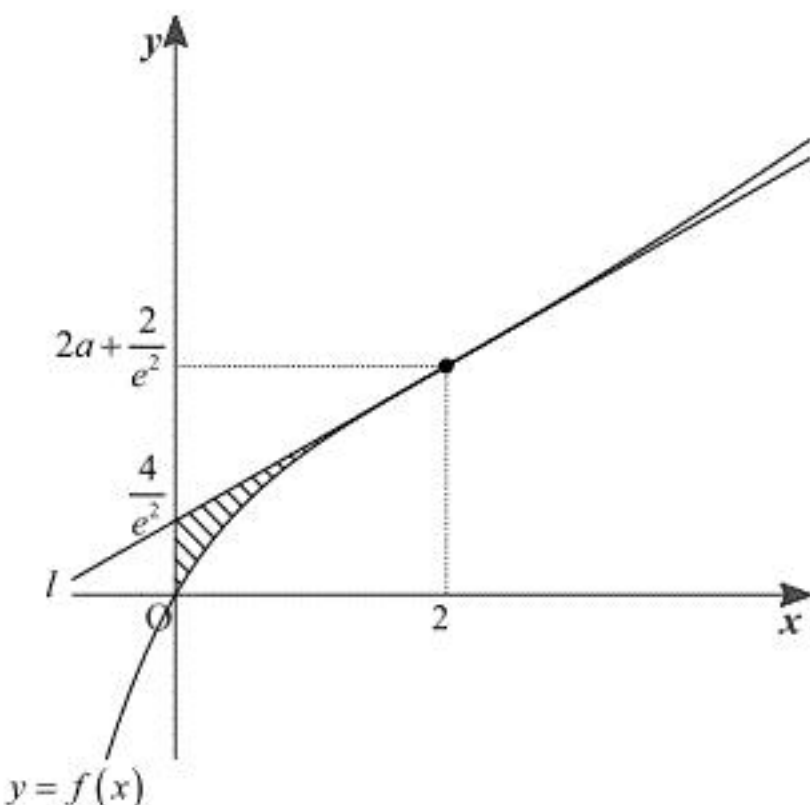
を得る。ただし, C_1, C_2 は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad I_1 = -(x+1)e^{-x} + C_1, \quad I_2 = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C_2 \quad (\text{積分定数は省略してもよい。})$$

(v)

不等式 $f'(x) > 0$ が成り立つことから, $f(x)$ の増減表, および $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。

x	...	2	...
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$2a + \frac{2}{e^2}$	$\nearrow$



上図より, V は直線 $y = 2a + \frac{2}{e^2}$ および y 軸と $y = f(x)$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回

転してできる立体の体積から, 底面の半径 2, 高さ $\left(2a + \frac{2}{e^2}\right) - \frac{4}{e^2} = 2a - \frac{2}{e^2}$ の円錐の体積を引いたものである。よって,

$$V = \pi \int_0^{2a + \frac{2}{e^2}} x^2 dy - \pi \cdot 2^2 \cdot \left(2a - \frac{2}{e^2}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

である。ここで,

$$\frac{dy}{dx} = a + (1-x)e^{-x} \Leftrightarrow dy = \{a + (1-x)e^{-x}\} dx$$

y	0	$\rightarrow$	$2a + \frac{2}{e^2}$
x	0	$\rightarrow$	2

であるから,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2a + \frac{2}{e^2}} x^2 dy - \pi \cdot 2^2 \cdot \left(2a - \frac{2}{e^2}\right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \pi \int_0^2 x^2 \{a + (1-x)e^{-x}\} dx - \frac{8}{3} \pi \left(a - \frac{1}{e^2}\right) \\ &= \pi \int_0^2 (ax^2 - x^3 e^{-x} + x^2 e^{-x}) dx - \frac{8}{3} \pi \left(a - \frac{1}{e^2}\right) \end{aligned}$$

となる。また, C_3 を積分定数として

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x} dx &= -x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 e^{-x} dx \\ &= -x^3 e^{-x} + 3I_2 \\ &= -x^3 e^{-x} - 3(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C_3 \\ &= -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + C_3 \end{aligned}$$

であることを利用すると,

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\frac{1}{3} ax^3 + (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \right]_0^2 - \frac{8}{3} \pi \left(a - \frac{1}{e^2}\right) \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{8}{3} a + \frac{38}{e^2} - \frac{10}{e^2} \right) - (6 - 2) \right\} - \frac{8}{3} \pi \left(a - \frac{1}{e^2}\right) \\ &= \left(\frac{92}{3e^2} - 4 \right) \pi \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad V = \left(\frac{92}{3e^2} - 4 \right) \pi$$

3

(i)(i-1)

点 N は y 軸上にあるため、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときを考えればよく、このとき $\cos \theta = 0$ より

$$r = b = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

を得る。よって、 $y_0 = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ である。

$$(答) \quad y_0 = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

(i-2)

点 L, R は x 軸上にあるため、 $\theta = 0, \pi$ のときを考えればよい。

[1] $\theta = 0$ のとき

$\cos \theta = 1$ より、

$$\begin{aligned} r &= \frac{b}{1+a} \\ &= \frac{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2\sqrt{3} - 2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

[2] $\theta = \pi$ のとき

$\cos \theta = -1$ より、

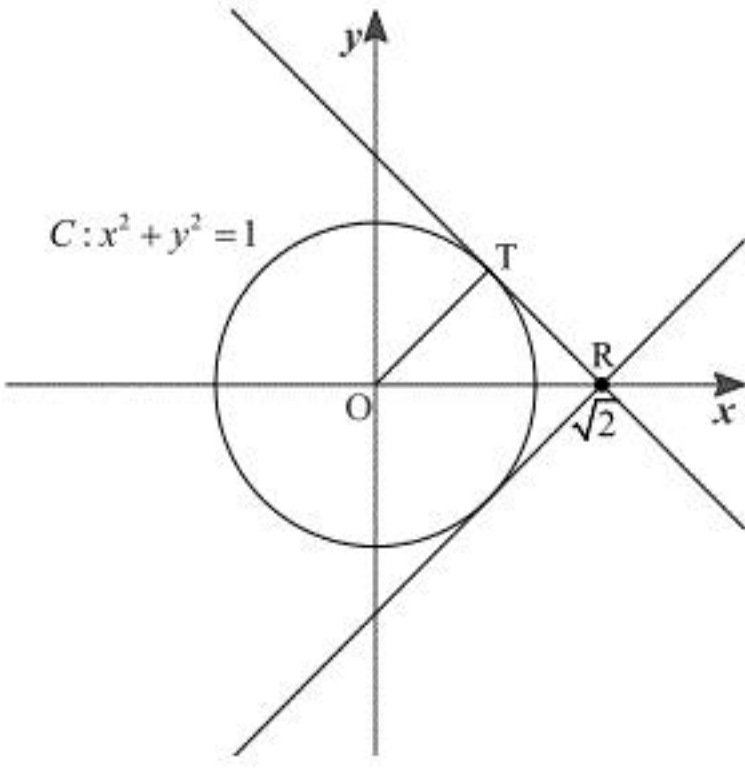
$$\begin{aligned} r &= \frac{b}{1-a} \\ &= \frac{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

[1] のとき x 座標は正、[2] のとき x 座標は負であるから、 $x_1 = -(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, $x_2 = \sqrt{2}$ である。

$$(答) \quad x_1 = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}), x_2 = \sqrt{2}$$

(ii)



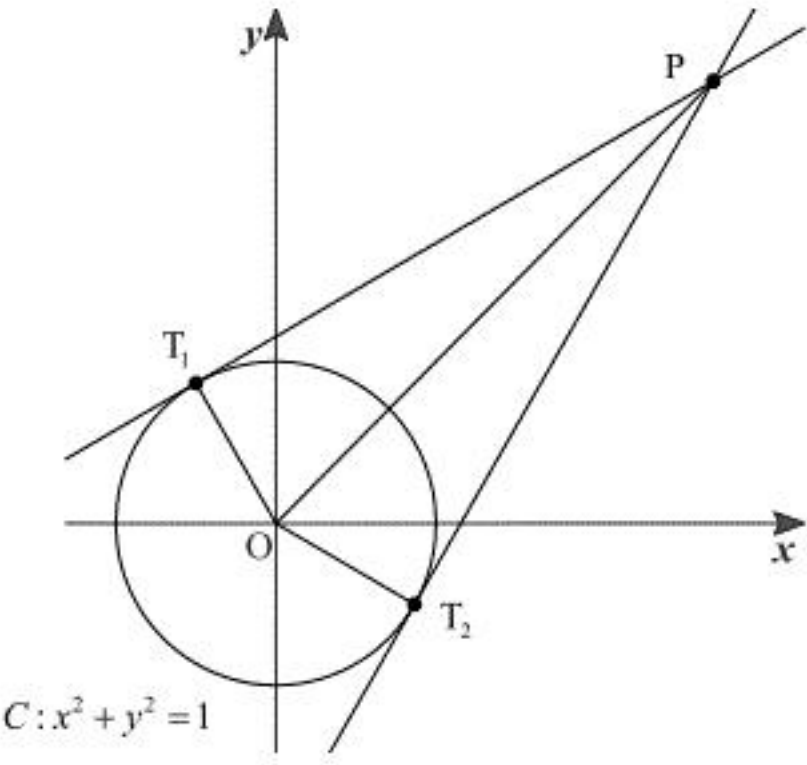
上図のように接点 T をおくと、 $\angle OTR = \frac{\pi}{2}$, $OT = 1$, $OR = \sqrt{2}$ となる。また、上図は x 軸に關し

て対称であるから $\angle ORT = \frac{\alpha}{2}$ である。よって、 $\triangle ORT$ が直角二等辺三角形であることから

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ を得る。}$$

$$(答) \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

(iii)



上図のように接点 T_1, T_2 を置き、 $\angle T_1PT_2 = \phi$ とする。ただし、点 P は楕円 E 上にあるとする。

上図は直線 OP に関して対称であるから、 $\angle OPT_1 = \frac{\phi}{2}$ である。また、

$OP = r$, $OT_1 = 1$, $\angle OT_1P = \frac{\pi}{2}$ であることから、

$$\sin \frac{\phi}{2} = \frac{OT_1}{OP} = \frac{1}{r}$$

となる。よって、2 倍角の公式より、

$$\begin{aligned} \cos \phi &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ &= 1 - 2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{2}{r^2} \end{aligned}$$

を得る。いま $0 < \phi < \pi$ であるから、 ϕ が最小となるのは $\cos \phi$ が最大となるときである。また、

$\cos \phi = 1 - \frac{2}{r^2}$ より、 $\cos \phi$ が最大となるのは r が最大値のときで、さらに

$r = \frac{b}{1 + a \cos \theta}$, $a > 0$, $b > 0$ より、 r は $\cos \theta$ が最小のときに最大値をとる。以上より $\cos \theta = -1$,

すなわち点 P が点 L と一致するときに ϕ は最小値 β をとる。このとき $r = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 1 - \frac{2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} \\ &= 1 - \frac{1}{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(iv)

点 P が点 N と一致するときに $\phi = \gamma$ となり、このとき $r = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= 1 - \frac{2}{\{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})\}^2} \\ &= 1 - \frac{1}{4(4 - 2\sqrt{3})} \\ &= \frac{15 - 8\sqrt{3}}{16 - 8\sqrt{3}} \\ &= \frac{6 - \sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{6 - \sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{8} > 0$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \gamma - \cos \frac{\pi}{3} &> 0 \\ \Leftrightarrow \cos \gamma &> \cos \frac{\pi}{3} \\ \therefore \gamma &< \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < \gamma < \pi) \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(i)

$$\begin{aligned}
 (x+1)f_1(x) &= (x+1)(ax+b) \\
 &= ax^2 + (a+b)x + b \\
 &= (2x^2 - 3x - 2) \cdot \frac{a}{2} + \left\{ \left(\frac{5}{2}a + b \right) x + (a+b) \right\}
 \end{aligned}$$

より, $f_2(x) = \left(\frac{5}{2}a + b \right) x + (a+b)$ である。

$$(\text{答}) \quad f_2(x) = \left(\frac{5}{2}a + b \right) x + (a+b)$$

(ii)(ii-1)

(i)と同様にして $(x+1)f_n(x) = (2x^2 - 3x - 2) \cdot \frac{a_n}{2} + \left\{ \left(\frac{5}{2}a_n + b_n \right) x + (a_n + b_n) \right\}$ を得られるから,

$$f_{n+1}(x) = a_{n+1}x + b_{n+1} \text{ より } a_{n+1} = \frac{5}{2}a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + b_n \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{5}{2}a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + b_n$$

(ii-2)

$$a_{n+1} = \frac{5}{2}a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + b_n \text{ より, } a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{3}{2}a_n \Leftrightarrow b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= \frac{5}{2}a_{n+1} + b_{n+1} \\
 &= \frac{5}{2}a_{n+1} + \left(a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n \right) \\
 &= \frac{7}{2}a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+2} = \frac{7}{2}a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n$$

(iii)

$$a_{n+2} = \frac{7}{2}a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n \text{ は}$$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - 3a_n) \\ a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} = 3\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right) \end{cases}$$

と変形できる。ここで, 数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列とみることができ

るから,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - 3a_n &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (a_2 - 3a_1) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(-\frac{1}{2}a + b \right) \left(\because a_2 = \frac{5}{2}a + b \right)
 \end{aligned}$$

となる。また, 数列 $\left\{ a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} \right\}$ は初項 $a_2 - \frac{1}{2}a_1$, 公比 3 の等比数列とみることができるか

ら,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n &= 3^{n-1} \left(a_2 - \frac{1}{2}a_1 \right) \\
 &= 3^{n-1} (2a + b)
 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
 \left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \right) - (a_{n+1} - 3a_n) &= 3^{n-1} (2a + b) - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(-\frac{1}{2}a + b \right) \\
 \therefore a_n &= 3^{n-1} \left(\frac{4}{5}a + \frac{2}{5}b \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(-\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \right)
 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_n = 3^{n-1} \left(\frac{4}{5}a + \frac{2}{5}b \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(-\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \right)$$

(iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{n-1} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0 \text{ より, 数列 } \{a_n\} \text{ が収束するには } \frac{4}{5}a + \frac{2}{5}b = 0, \text{ すなわち } 2a + b = 0 \text{ と}$$

なることが必要である。逆にこのとき,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{5}a - \frac{2}{5}b \right) \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 0
 \end{aligned}$$

となり確かに数列 $\{a_n\}$ は収束する。

$$(\text{答}) \quad 2a + b = 0$$

(v)

数列 $\{a_n\}$ が発散するとき, (iv)より $2a + b \neq 0$ である。ここで,

$$\alpha = \frac{4}{5}a + \frac{2}{5}b, \beta = -\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \alpha - \left(\frac{1}{2} \right)^n \beta}{3^{n-1} \alpha - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \beta} \\
 &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \left(\frac{1}{6} \right)^n \beta}{\alpha - \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} \beta} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

である。このとき, $a_{n+1} = \frac{5}{2}a_n + b_n$ より,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{5}{2}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{5}{2} \\
 &= 3 - \frac{5}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$$