

数 学

前期日程

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題用紙は4ページで、問題は4問あります。全問に解答しなさい。
解答は解答用紙に記入しなさい。表面に書ききれない場合は、裏面を使用して
もよいが、その場合は必ず表面に「裏面に続く」と記入しなさい。
3. 解答用紙は4枚(その1～その4)あります。
4. 受験番号を、すべての解答用紙の受験番号欄(1枚につき2カ所)に正確に記入
しなさい。
5. 試験中に問題用紙及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、汚れ等に
気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 試験時間は120分です。
7. 各設問に記載した配点は、200点満点の場合の配点です。なお、一般入試B方
式(理科重点)では200点満点を150点満点に換算します。一般入試A方式(数
学重点)、帰国子女入試及び私費外国人留学生入試の満点はそれぞれ200点で
す。
8. 試験終了時に、監督者の指示に従って、すべての解答用紙を提出しなさい。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1

関数

$$f(x) = x + 2 \cos x$$

を考えると、以下の問いに答えよ。

(配点 50)

- (i) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (ii) 区間 $0 \leq x \leq \pi$ における $f(x)$ の最大値 M と最小値 m をそれぞれ求めよ。
- (iii) 不等式 $0 \leq x \leq \pi$ の表す座標平面上の領域において、曲線 $y = f(x)$ 、 y 軸および直線 $y = \frac{\pi}{2}$ で囲まれる図形を D とする。図形 D の面積 S を求めよ。
- (iv) 次の不定積分を求めよ。ただし、積分定数は省略してもよい。

$$I = \int x \cos x \, dx$$

- (v) 図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

2

関数 $f(x) = ax + xe^{-x}$ を考えるとき、以下の問いに答えよ.

ただし、 e は自然対数の底とし、 a は定数とする. (配点 50)

- (i) 導関数 $f'(x)$ および 第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ.
- (ii) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点 A の x 座標 x_0 を求めよ. さらに、すべての実数 x に対して、不等式 $f'(x) > 0$ が成り立つような定数 a の条件を求めよ.

以下では、定数 a は、(ii) で求めた条件をみたすとする.

- (iii) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点 $A(x_0, f(x_0))$ における接線 l の方程式を定数 a を用いて表せ.

- (iv) 次の不定積分をそれぞれ求めよ. ただし、積分定数は省略してもよい.

$$I_1 = \int xe^{-x}dx, \quad I_2 = \int x^2e^{-x}dx$$

- (v) 曲線 $y = f(x)$, y 軸 および 接線 l で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

3

$a = 2\sqrt{3} - 3$, $b = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ とする. 極座標 (r, θ) に関する極方程式

$$r = \frac{b}{1 + a \cos \theta}$$

で表された楕円 E を考える. 以下の問いに答えよ.

(配点 50)

(i) 楕円 E を直交座標 (x, y) で考える.

(i-1) 楕円 E と y 軸の交点で y 座標が正である点 N の y 座標 y_0 を求めよ.

(i-2) 楕円 E と x 軸の 2 交点を, x 座標の小さいものから順に, 点 L , 点 R とする. 点 L の x 座標 x_1 , 点 R の x 座標 x_2 をそれぞれ求めよ.

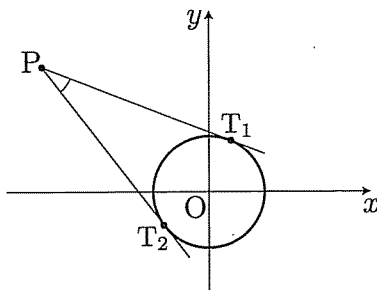
以下の問いでは, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. このとき, 円 C の外部にある点 P から円 C に 2 本の異なる接線を引いてその接点を T_1, T_2 とするとき, $\angle T_1PT_2$ を点 P から円 C を見込む角 という. (下図を参照)

ただし, $0 < \angle T_1PT_2 < \pi$ とする.

(ii) 点 R から円 C を見込む角 α を求めよ.

(iii) 楕円 E 上の点から円 C を見込む角の最小値を β とするとき, $\cos \beta$ の値を求めよ.

(iv) 点 N から円 C を見込む角 γ が $\frac{\pi}{3}$ より小さいことを証明せよ.



4

a, b を定数とし、整式 $f_1(x)$ を $f_1(x) = ax + b$ と定義する.

次に、整式 $(x+1)f_1(x)$ を $2x^2 - 3x - 2$ で割った余りを $f_2(x)$ と定義する.

さらに、整式 $(x+1)f_2(x)$ を $2x^2 - 3x - 2$ で割った余りを $f_3(x)$ と定義する.

以下、このようにして、各自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、整式 $(x+1)f_n(x)$ を $2x^2 - 3x - 2$ で割った余りを $f_{n+1}(x)$ と定義する. このとき、整式 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して、以下の問いに答えよ. (配点 50)

(i) 整式 $f_2(x)$ を a, b を用いて表せ.

(ii) 各自然数 $n \geq 1$ に対して、整式 $f_n(x)$ を $f_n(x) = a_n x + b_n$ において、
2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を定める. ただし、 $a_1 = a, b_1 = b$ とする.

(ii-1) a_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ. また、 b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ.

(ii-2) a_{n+2} を a_n, a_{n+1} を用いて表せ.

(iii) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を a, b を用いて表せ.

(iv) 数列 $\{a_n\}$ が収束するための条件を、 a, b を用いて表せ.

(v) 数列 $\{a_n\}$ が発散するとき、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

を求めよ.

