

1

(i)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2e-x)\log x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 2e, 1
 \end{aligned}$$

である。

(答) $x = 1, 2e$

(ii)

$$f(x) = (2e-x)\log x$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (2e-x)' \log x + (2e-x)(\log x)' \\
 &= -\log x + \frac{2e}{x} - 1 \\
 f''(x) &= -\frac{1}{x} - \frac{2e}{x^2} \\
 &= -\frac{x+2e}{x^2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad f'(x) = -\log x + \frac{2e}{x} - 1, \quad f''(x) = -\frac{x+2e}{x^2}$$

(iii)

$x > 0$ において常に $f''(x) < 0$ であるので、 $f'(x)$ は単調減少である。ここで、

$$f'(e) = -\log e + \frac{2e}{e} - 1 = 0$$

に注意すると、 $x > 0$ における $f'(x) = 0$ の解が $x = e$ のみであること、及び $x = e$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に変化することが分かる。よって $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大	↘

増減表より、 $f(x)$ は $x = e$ で極大値

$$f(e) = (2e-e)\log e = e$$

をとる。

(答) 極大値： $f(e) = e$

(iv)

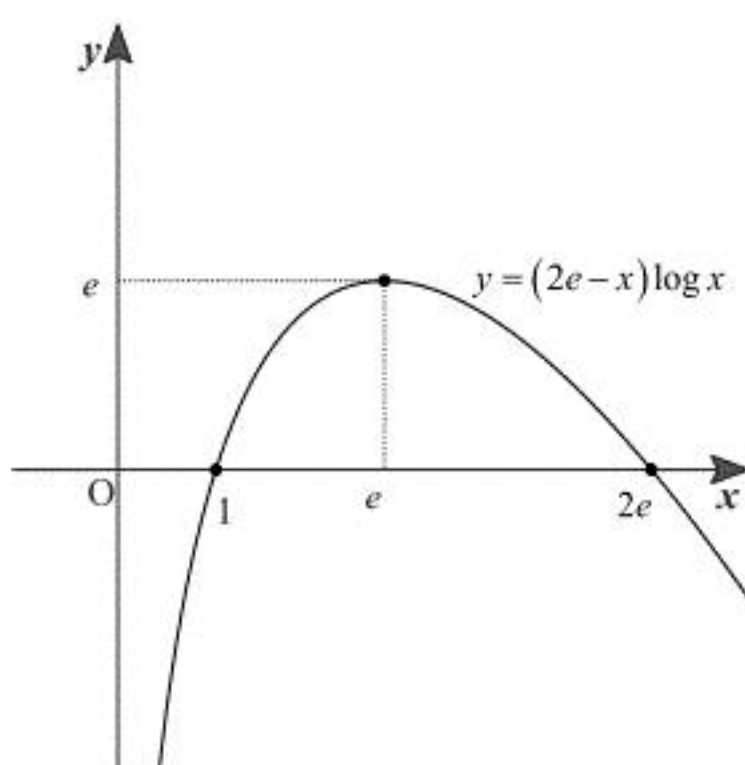
$$\begin{aligned}
 I &= \int x \log x dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x^2 (\log x)' dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad I = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2$$

(v)

$y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



よって求める面積は、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^{2e} (2e-x)\log x dx \\
 &= \int_1^{2e} (2e\log x - x\log x) dx \\
 &= \left[2ex\log x - 2ex - \frac{1}{2}x^2\log x + \frac{1}{4}x^2 \right]_1^{2e} \\
 &= 2e^2\log 2 - e^2 + 2e - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S = 2e^2\log 2 - e^2 + 2e - \frac{1}{4}$$

2

(i)

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - 2\cos 2x - 1$$

であるので、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + 4\sin 2x \\ &= -\cos x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 8\sin x \right) \\ &= \frac{\cos x (8\sin^3 x - 1)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad f'(x) = \frac{\cos x (8\sin^3 x - 1)}{\sin^2 x}$$

(ii)

$0 < x < \pi$ の範囲では、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} - 2\cos 2x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} - 2(1 - 2\sin^2 x) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4\sin^3 x - 3\sin x + 1}{\sin x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(\sin x + 1)(2\sin x - 1)^2}{\sin x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 < x < \pi \text{ では } \sin x > 0) \\ \therefore x &= \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(答) \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

(iii)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x (8\sin^3 x - 1)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} (2\sin x - 1)(4\sin^2 x + 2\sin x + 1) \\ &= \frac{2}{\sin^2 x} \left\{ 4\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} \cdot \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

である。 $0 < x < \pi$ の範囲では $\frac{2}{\sin^2 x} \left\{ 4\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} > 0$ であるから、 $f'(x)$ の符号変化は

$\cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)$ の符号変化と一致する。よって $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$	$\nearrow$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nearrow$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ の極小値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{1} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

及び

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{1} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

である。また、極大値は

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1} - 2 \cdot (-1) - 1 = 2$$

である。

$$(答) \quad \text{極小値：} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0, \quad \text{極大値：} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

(iv)

$t = \cos x$ ($-1 < t < 1$) と置換すると、

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

となる。これを利用すると、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin x} \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \sin x dx \\ &= \int \frac{1}{1 - \cos^2 x} \cdot (-dt) \\ &= \int \frac{1}{t^2 - 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \{ \log|t-1| - \log|t+1| \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \log(1-t) - \log(1+t) \} \quad (\because -1 < t < 1) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-t}{1+t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) \end{aligned}$$

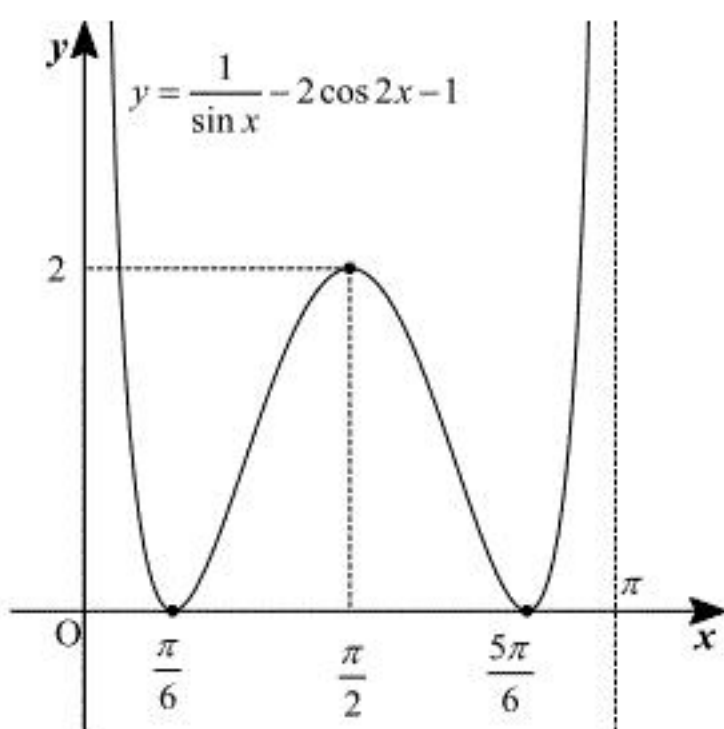
と計算できる。

$$(答) \quad I = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \infty$$

であることに注意すると、 $y = f(x)$ ($0 < x < \pi$) のグラフは以下のようになる。



よって求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{\sin x} - 2\cos 2x - 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) - \sin 2x - x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\log \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - \log \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{2}{3}\pi \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 \right\} + \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \\ &= 2\log(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S = 2\log(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

(i)

$$C: \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{8}\right)^2 = 1$$

より、 C の漸近線の方程式は、

$$y = \pm \frac{8}{4}x \Leftrightarrow y = \pm 2x$$

である。ここで $y = 2x$ と点 $(5, 6)$ の距離を d_1 、 $y = -2x$ と点 $(5, 6)$ の距離を d_2 とすると、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{|2 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ d_2 &= \frac{|2 \cdot 5 + 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{16}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

となる。 $d_1 < d_2$ より、求める漸近線 ℓ_1 の方程式は $y = 2x$ 、求める距離 d は $d = d_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}$ である。

(答) $\ell_1: y = 2x, d: \frac{4}{\sqrt{5}}$

(ii)

C 上の点 $(5, 6)$ における C の接線の方程式は

$$\frac{5}{16}x - \frac{6}{64}y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{10}{3}x - \frac{32}{3}$$

であるから、この接線の傾きは $\frac{10}{3}$ である。

(答) $\frac{10}{3}$

(iii) (ア)

直線 $\ell: 2(m^2 + 1)x - (m^2 - 1)y = 16m$ が点 $(1, 6)$ を通るのは、

$$\begin{aligned} 2(m^2 + 1) \cdot 1 - (m^2 - 1) \cdot 6 &= 16m \\ \Leftrightarrow m^2 + 4m - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= -2 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

のときである。

(答) $m = -2 \pm \sqrt{6}$

(イ)

点 (X, Y) が領域 D に含まれるとすると、点 (X, Y) は直線 ℓ 上の点であるから、

$$\begin{aligned} 2(m^2 + 1)X - (m^2 - 1)Y &= 16m \\ \Leftrightarrow (2X - Y)m^2 - 16m + 2X + Y &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。 (X, Y) が満たすべき条件は、

①を満たす実数 m が存在すること

である。

[1] $2X = Y$ のとき

①は $-16m + 2Y = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}Y$ となるから、 m は存在する。

[2] $2X \neq Y$ のとき

①の判別式を D とすると、満たすべき条件は、 $D \geq 0$ すなわち

$$\begin{aligned} (-8)^2 - (2X - Y)(2X + Y) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 64 - 4X^2 + Y^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{64} &\leq 1 \end{aligned}$$

である。ただし、この不等式は、 $Y = 2X$ でも成立する。

[1], [2]より、求める点 (X, Y) の条件は

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{64} \leq 1$$

であるから、領域 D は $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} \leq 1$ によって表される。

(答) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} \leq 1$

(ウ)

直線 ℓ が C 上の点 (x_1, y_1) を通るとき、

$$(2x_1 - y_1)m^2 - 16m + 2x_1 + y_1 = 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。また点 (x_1, y_1) は C 上の点であるから、

$$\begin{aligned} 4x_1^2 - y_1^2 &= 64 \\ \Leftrightarrow (2x_1 + y_1)(2x_1 - y_1) &= 64 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

も成り立つ。 $2x_1 + y_1 = 0$ とすると③において $0 = 64$ となり矛盾するから、 $2x_1 + y_1 \neq 0$ であり、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow 2x_1 - y_1 = \frac{64}{2x_1 + y_1}$$

と変形できる。この式を②に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{64}{2x_1 + y_1} \cdot m^2 - 16m + 2x_1 + y_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 64m^2 - 16m(2x_1 + y_1) + (2x_1 + y_1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{8m - (2x_1 + y_1)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{2x_1 + y_1}{8} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $m = \frac{2x_1 + y_1}{8}$

[I](i)

操作を1回行った後に点Pの座標が2の倍数になるのは、1回の操作で6以外の目が出るときである。よってその確率は、

$$p_1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

となる。また、2回目の操作を行った後の点Pの座標が2の倍数であるのは、「1回目の操作後の点Pの座標が2の倍数で、2回目に6の目以外が出るとき」、または「1回目の操作後の点Pの座標が2の倍数でなく、2回目に6の目が出るとき」のいずれかの場合である。よって、

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \cdot \frac{5}{6} + (1 - p_1) \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3} p_1 + \frac{1}{6} \\ &= \frac{13}{18} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{5}{6}, p_2 = \frac{13}{18}$$

(ii)

$(n+1)$ 回目の操作後の点Pの座標が2の倍数であるのは、「 n 回目の操作後の点Pの座標が2の倍数で、 $(n+1)$ 回目に6の目以外が出るとき」、または「 n 回目の操作後の点Pの座標が2の倍数でなく、 $(n+1)$ 回目に6の目が出るとき」のいずれかである。よって、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \cdot \frac{5}{6} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

が成立する。また、

$$p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6} \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

と変形できるから、

$$\begin{aligned} p_n &= \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6}, p_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

[II](iii)

2回目の操作を行った後の点Pの座標が3の倍数であるのは、「1回目に1, 3, 5の目のいずれかが出て2回目に6の目が出るとき」、「1回目に6の目が出て2回目に1, 3, 5の目のいずれかが出るとき」、「2回とも2または4の目が出るとき」のいずれかであるので、

$$q_2 = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{18}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_2 = \frac{5}{18}$$

(iv)

さいころを1回投げ、1, 3, 5の目のうちいずれかの目が出る事象を A 、6の目が出る事象を B 、2, 4の目のうちいずれかの目が出る事象を C とする。事象 A が起こる確率を $P(A)$ とすると、

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ であり、同様に $P(B) = \frac{1}{6}$ 、 $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。また、 n 回の操作後の点Pの座

標が3の倍数である確率を q_n 、3で割った余りが1である確率を r_n とおくと、3で割った余りが2である確率は $1 - q_n - r_n$ と表される。ここで、 $(n+2)$ 回操作後の点Pの座標が3の倍数であるのは、

- ・ n 回操作後の点Pの座標が3の倍数で、その後事象 A, B が1回ずつまたは事象 C が2回起こるとき
- ・ n 回操作後の点Pの座標を3で割った余りが1で、その後事象 A, C が1回ずつまたは事象 B が2回起こるとき
- ・ n 回操作後の点Pの座標を3で割った余りが2で、その事象 B, C が1回ずつまたは事象 A が2回起こるとき

のいずれかの場合である。よってその確率について、

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= q_n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + r_n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) + (1 - q_n - r_n) \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{12} q_n + \frac{13}{36} \end{aligned}$$

が成立する。

$$(\text{答}) \quad q_{n+2} = -\frac{1}{12} q_n + \frac{13}{36}$$

(v)

q_1 は、1回の操作で事象 C が起こる確率であり、 $q_1 = \frac{1}{3}$ である。ここで、

$$q_{n+2} = -\frac{1}{12} q_n + \frac{13}{36} \Leftrightarrow q_{n+2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \left(q_n - \frac{1}{3} \right)$$

であるから、以下のように計算できる。

[1] n が偶数のとき

$$\begin{aligned} q_n &= \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{n}{2}-1} \left(q_2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \\ &= \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

[2] n が奇数のとき

$$\begin{aligned} q_n &= \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(q_1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \\ &= \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である

以上より[1], [2]をまとめると、 $q_n = \frac{1+(-1)^n}{3} \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{3}$ となる。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1+(-1)^n}{3} \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad q_n = \frac{1+(-1)^n}{3} \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{3}$$