

【解答】

(1)	(i)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ						
		8	1	2	2	6	1	6						
	(ii)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス							
(2)		セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ		
		4	2	3	2	1	3	3	9	3	2	6		

【解説】

(1)(i)

方程式 $4^x+2^{x+3}+9^{\log_5 4}-4=0$ を $t=2^x$ を用いて変形すると、

$$\begin{aligned}4^x-2^{x+3}+9^{\log_5 4}-4&=0\\ \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2^x\cdot 2^3+3^{2\log_5 4}-4&=0\\ \Leftrightarrow t^2-8t+4^2-4&=0\\ \Leftrightarrow t^2-8t+12&=0\end{aligned}$$

となる。ただし、 $t>0$ である。これを t について解くと、

$$\begin{aligned}t^2-8t+12&=0\\ \Leftrightarrow (t-2)(t-6)&=0\\ \therefore t&=2, 6\end{aligned}$$

である。これは $t>0$ を満たす。したがって、(＊)の解は、 $t=2$ のとき、

$$\begin{aligned}t&=2\\ \Leftrightarrow 2^x&=2\\ \therefore x&=1\end{aligned}$$

であり、 $t=6$ のとき、

$$\begin{aligned}t&=6\\ \Leftrightarrow 2^x&=6\\ \therefore x&=\log_2 6\end{aligned}$$

である。

(ii)

無理関数の定義域より、

$$x\geq 0$$

である。また、真数条件より、

$$\begin{aligned}\begin{cases}x-3>0\\ 5-x>0\\ \sqrt{x}>0\end{cases}\\ \Leftrightarrow \begin{cases}x>3\\ x<5\\ x>0\end{cases}\\ \therefore 3<x<5\end{aligned}$$

である。与えられた不等式を解くと、

$$\begin{aligned}\log_a(x-3)-\log_{a^2}(5-x)&<\log_a\sqrt{x}\\ \Leftrightarrow \log_a(x-3)-\frac{\log_a(5-x)}{\log_a a^2}&<\log_a\sqrt{x}\\ \Leftrightarrow \log_a(x-3)-\frac{\log_a(5-x)}{2}&<\log_a\sqrt{x}\\ \Leftrightarrow 2\log_a(x-3)-\log_a(5-x)&<2\log_a\sqrt{x}\\ \Leftrightarrow \log_a(x-3)^2<\log_a x+\log_a(5-x)\\ \Leftrightarrow \log_a(x-3)^2<\log_a(5-x)x&\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。以下、 a の範囲について場合分けをする。

[1] $a>1$ のとき

①を解くと、

$$\begin{aligned}\log_a(x-3)^2<\log_a(5-x)x\\ \Leftrightarrow (x-3)^2<(5-x)x\\ \Leftrightarrow x^2-6x+9<5x-x^2\\ \Leftrightarrow 2x^2-11x+9<0\\ \Leftrightarrow (x-1)(2x-9)<0\\ \Leftrightarrow 1<x<\frac{9}{2}\end{aligned}$$

であり、真数条件 $3<x<5$ と合わせると、

$$3<x<\frac{9}{2}$$

である。

[2] $0<a<1$ のとき

①を解くと、

$$\begin{aligned}\log_a(x-3)^2<\log_a(5-x)x\\ \Leftrightarrow (x-3)^2>(5-x)x\\ \Leftrightarrow x^2-6x+9>5x-x^2\\ \Leftrightarrow 2x^2-11x+9>0\\ \Leftrightarrow (x-1)(2x-9)>0\\ \Leftrightarrow x<1,\frac{9}{2}<x\end{aligned}$$

であり、真数条件 $3<x<5$ と合わせると、

$$\frac{9}{2}<x<5$$

である。

(2)

α と β を極形式で表すと、

$$\begin{aligned}\alpha&=-2+2\sqrt{3}i\\ &=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\ \beta&=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

となる。領域 D_2 は $\triangle\text{OA}_2\text{B}_2$ の周と内部の領域である。O は複素数平面における原点であり、

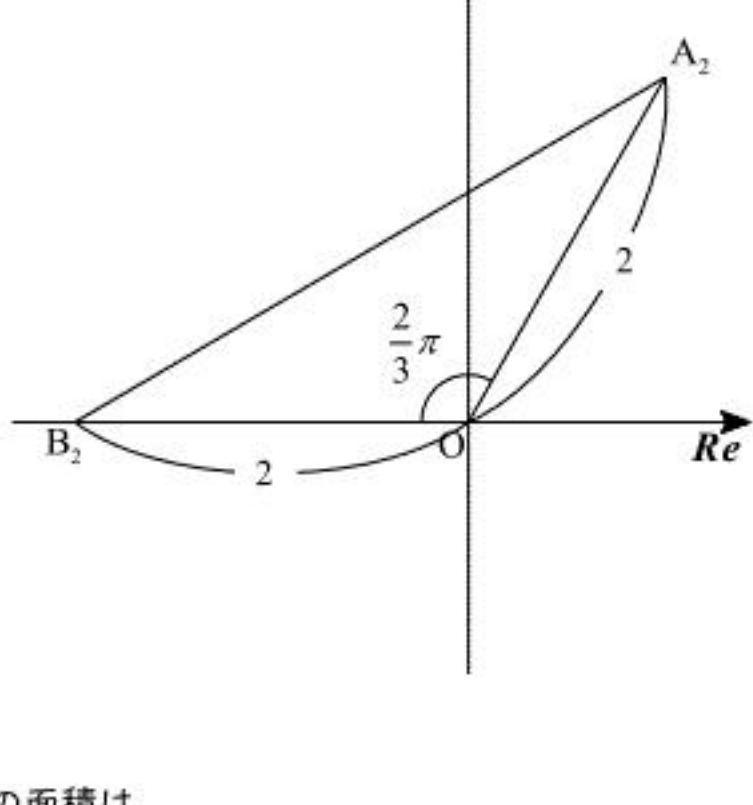
A_2 に対応する複素数は、

$$\begin{aligned}4\beta^{2-1}&=4\beta\\ &=4\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)\\ &=2\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

であり、 B_2 に対応する複素数は、

$$\begin{aligned}\alpha\beta^{2-1}&=\alpha\beta\\ &=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)\\ &=2(\cos\pi+i\sin\pi)\end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle\text{OA}_2\text{B}_2$ を図示すると下図を得る。



したがって、領域 D_2 の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\text{OA}_2\cdot\text{OB}_2\cdot\sin\angle\text{A}_2\text{OB}_2&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\\ &=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &=\sqrt{3}\end{aligned}$$

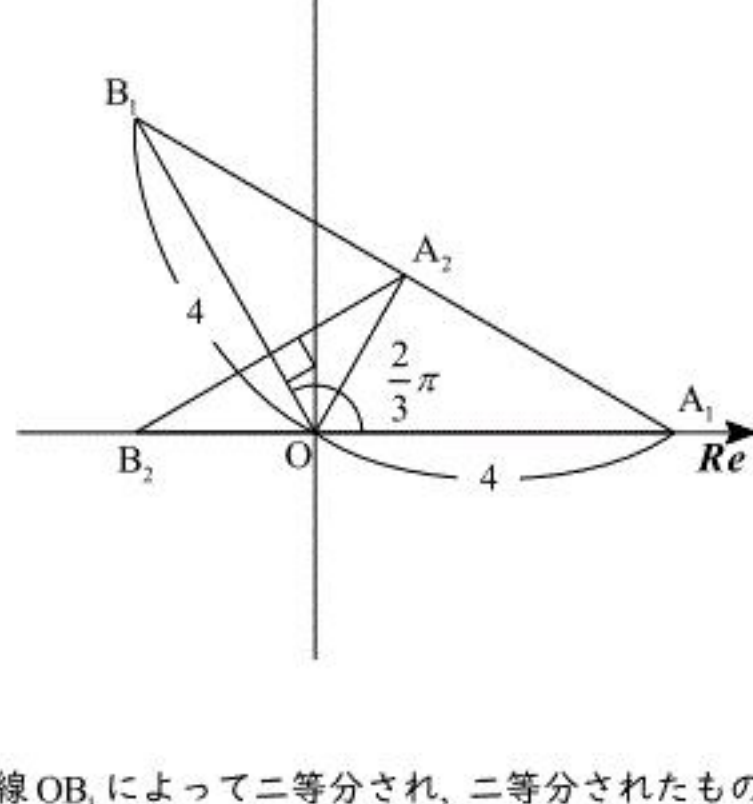
である。 S_2 は領域 D_1 、 D_2 の和集合の表す領域の面積である。領域 D_1 は三角形 OA_1B_1 の周と内部の領域である。 A_1 に対応する複素数は、

$$4\beta^{1-1}=4$$

であり、 B_1 に対応する複素数は、

$$\begin{aligned}\alpha\beta^{1-1}&=\alpha\\ &=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle\text{OA}_1\text{B}_1$ と $\triangle\text{OA}_2\text{B}_2$ を図示すると以下の通りである。



図より、領域 D_2 は直線 OB_1 によって二等分され、二等分されたもののうち一方は領域 D_1 の内部にあり、もう一方は領域 D_1 の外部にある。よって、 S_2 は領域 D_1 の面積と領域 D_2 の面積の半分との和である。領域 D_1 の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\text{OA}_1\cdot\text{OB}_1\cdot\sin\angle\text{A}_1\text{OB}_1&=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\\ &=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &=4\sqrt{3}\end{aligned}$$

であるので、

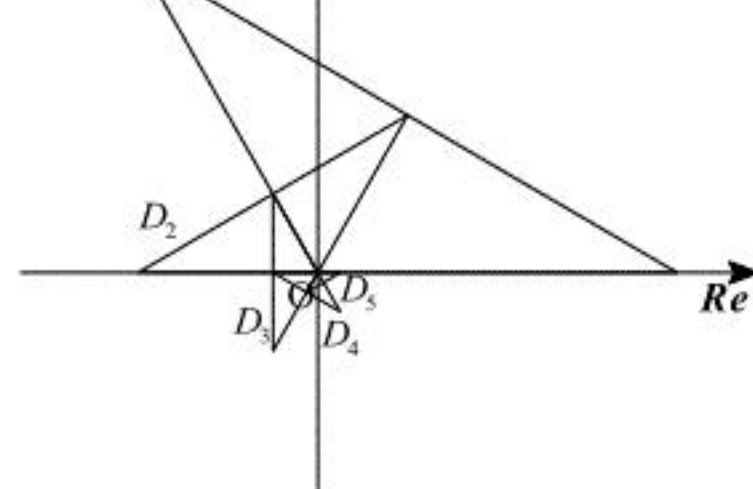
$$\begin{aligned}S_2&=4\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\\ &=\frac{9}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。次に、 $S_n=S_{n-1}$ を満たす最小の自然数 n ($n\geq 2$) の値を考える。まず、

$$\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)$$

であるので、領域 D_n は領域 D_{n-1} を原点 O を中心に $\frac{1}{3}\pi$ 回転し、各辺の長さを $\frac{1}{2}$ 倍したもので

ある。これにしたがって、 $\triangle\text{OA}_1\text{B}_1$ 、 OA_2B_2 、 $\dots$ 、 OA_5B_5 を図示すると以下の通りである。



図のように、 $n=2, 3, 4, 5$ において、領域 D_n の半分は領域 D_{n-1} の内部にあり、残りの半分は領域 D_{n-1} の外部にあるので、 $S_n\neq S_{n-1}$ である。 $n=6$ においても、領域 D_6 の半分は領域 D_5 の内部にあり、残りの半分は領域 D_5 の外部にある。しかし、領域 D_6 のうち領域 D_5 の外部にある部分は全て領域 D_1 の内部にあるので、 $S_n=S_{n-1}$ である。したがって、 $S_n=S_{n-1}$ を満たす最小の自然数 n ($n\geq 2$) の値は $n=6$ である。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク						
	1	2	1	3	3	6	4	3						
(2)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	
	6	6	5	6	1	6	1	3	2	2	7	4	9	

【解説】

(1)

サイコロの目の出方は6通りであり、これらは同様に確からしい。まず、1回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて同色である確率を考える。1回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて黒色であることはあり得ないので、白色であるときのみ考える。3点①、⑤、③にある石がすべて白色であるのは、出た目が2, 4, 6であるときであるから、3通りである。よって、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。2回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて同色である確率を考える。2回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて黒色であることはあり得ないので、白色であるときのみ考える。3点①、⑤、③にある石がすべて白色であるのは、2回とも出た目が2, 4, 6のいずれかであるときと、2回とも同じ目が出て、その目が1, 3, 5であるときである。よって、

$$3^2 + 3 = 12$$

より、12通りである。よって、

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{12}{36} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。 n 回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて同色であるとき、 $(n+1)$ 回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて同色であるのは、 $(n+1)$ 回目の試行で出た目が2, 4, 6のいずれかのときである。一方、 n 回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて同色でないとき、3つの石のうち、1つだけ色が異なるから、 $(n+1)$ 回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて同色であるのは、 $(n+1)$ 回目の試行で出た目が1つだけ色が異なる石の置かれている番号となるときである。よって、 a_{n+1} を a_n を用いて表すと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{6} \cdot a_n + \frac{1}{6} \cdot (1 - a_n) \\ &= \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。この漸化式を変形すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{4} &= \frac{1}{3} \left(a_n - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

である。よって、数列 $\left\{ a_n - \frac{1}{4} \right\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。数列 $\left\{ a_n - \frac{1}{4} \right\}$ の初項は、

$$\begin{aligned} a_1 - \frac{1}{4} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるので、数列 $\left\{ a_n - \frac{1}{4} \right\}$ の一般項は、

$$a_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

である。

(2)

5点①、②、③、④、⑤に置かれた5個の石について、すべてが同色である事象を A 、黒石が1個または4個である事象を B 、黒石が2個または3個である事象を C とする。まず、 $(n+1)$ 回目の試行の後、事象 A が起きるのは、「 n 回目の試行の後、事象 A が起き、 $(n+1)$ 回目の試行で出た目が6であるとき」または、「 n 回目の試行の後、事象 B が起き、 $(n+1)$ 回目の試行で出た目が1つだけ色が異なる石の置かれている番号であるとき」である。よって、

$$p_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n$$

である。次に、 $(n+1)$ 回目の試行の後、事象 B が起きるのは、「 n 回目の試行の後、事象 A が起き、 $(n+1)$ 回目の試行で出た目が6以外であるとき」または、「 n 回目の試行の後、事象 B が起き、 $(n+1)$ 回目の試行で出た目が6であるとき」または、「 n 回目の試行の後、事象 C が起き、 $(n+1)$ 回目の試行で出た目が2つ置かれている方の色の石が置かれている番号のいずれかであるとき」である。よって、 $p_n + q_n + r_n = 1$ を用いると、

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{2}{6} r_n \\ &= \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{3} (1 - p_n - q_n) \\ &= \frac{1}{2} p_n - \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。また、1回目の試行の後、事象 A が起きるのは、1回目の試行で出た目が6であるときであるので、

$$p_1 = \frac{1}{6}$$

である。また、1回目の試行の後、事象 B が起きるのは、1回目の試行で出た目が6以外であるときであるので、

$$q_1 = \frac{5}{6}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} p_4 &= \frac{1}{6} p_3 + \frac{1}{6} q_3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} p_2 + \frac{1}{6} q_2 \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} p_2 - \frac{1}{6} q_2 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{9} p_2 + \frac{1}{18} \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{6} p_1 + \frac{1}{6} q_1 \right) + \frac{1}{18} \\ &= \frac{1}{54} p_1 + \frac{1}{54} q_1 + \frac{1}{18} \\ &= \frac{1}{54} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{54} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{18} \\ &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

となる。また、 n 回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて同色であるか、または3点②、⑤、④にある石がすべて同色である確率を考える。 n 回の試行の後、3点①、⑤、③にある石がすべて同色である事象を D 、 n 回の試行の後、3点②、⑤、④にある石がすべて同色である事象を E とすると、 $D \cap E = A$ より、

$$\begin{aligned} P(D \cup E) &= P(D) + P(E) - P(D \cap E) \\ &= P(D) + P(E) - P(A) \end{aligned}$$

である。対称性より、

$$P(D) = P(E)$$

であり、 $P(D) = a_n$ 、 $P(D \cup E) = b_n$ 、 $P(A) = p_n$ であるので、

$$\begin{aligned} P(D \cup E) &= P(D) + P(E) - P(A) \\ \Leftrightarrow P(D \cup E) &= P(D) + P(D) - P(A) \\ \Leftrightarrow P(D \cup E) &= 2P(D) - P(A) \\ \Leftrightarrow b_n &= 2a_n - p_n \end{aligned}$$

である。ここで、(1)より、

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{4-1}} \right) \\ &= \frac{7}{27} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} b_4 &= 2a_4 - p_4 \\ &= 2 \cdot \frac{7}{27} - \frac{2}{27} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ						
	3	3	2						
(2)	エ	オ							
	2	2							
(3)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	4	1	8	3	3	6	1	4	

〔解説〕

(1)

$A(4, -5, 2), B(4, -2, 5), C(-1, -1, 4), D(1, 1, 5)$ より,

$$\overrightarrow{AB} = (0, 3, 3), \overrightarrow{CD} = (2, 2, 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= p\overrightarrow{AB} \\ &= (0, 3p, 3p) \\ \overrightarrow{CQ} &= q\overrightarrow{CD} \\ &= (2q, 2q, q) \end{aligned}$$

である。よって, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ}$ より,

$$\overrightarrow{OP} = (4, 3p-5, 3p+2) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (2q-1, 2q-1, q+4) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。3点O, P, Qが一直線上にあるとき, $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OQ}$ (k は実数) が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= k\overrightarrow{OQ} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k(2q-1) \\ 3p-5 = k(2q-1) \\ 3p+2 = k(q+4) \end{cases} \end{aligned}$$

である。これを解くと, $p=3, q=\frac{3}{2}, k=2$ となる。

(2)

②, ③より,

$$\overrightarrow{PQ} = (2q-5, -3p+2q+4, -3p+q+2) \quad \dots \textcircled{4}$$

である。直線PQと直線ABが垂直であるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 \cdot (2q-5) + 3 \cdot (-3p+2q+4) + 3 \cdot (-3p+q+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2-2p+q &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(3)

線分PQの長さが最小であるのは、直線PQが直線ABと直線CDの共通垂線であるときである。直線PQが直線CDに垂直であるとき、①, ④より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot (2q-5) + 2 \cdot (-3p+2q+4) + 1 \cdot (-3p+q+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -9p+9q &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= q \end{aligned}$$

となる。これと(2)より、線分PQの長さが最小となるのは $p=q=2$ のときであり、そのときのP, Qの座標は $P(4, 1, 8), Q(3, 3, 6)$ である。ここで、 $P_1(4, 1, 8), Q_1(3, 3, 6)$ 、また平面 α =平面 P_1Q_1A 、平面 β =平面 P_1Q_1C とすると、平面 α, β の交線 l は直線 P_1Q_1 であり、直線ABと直線CDはそれぞれ交線 l に垂直である。したがって2直線 m_α, m_β のなす角は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ のなす角に等しい。すなわち、2平面 P_1Q_1A, P_1Q_1C のなす角 θ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ のなす角に等しいから、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} \\ &= \frac{0 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{0+9+9} \sqrt{4+4+1}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{18} \sqrt{9}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であることから、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ である。

【解答】

		ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク			
		2	3	1	2	4	3	3	2			
(1)		ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
		2	3	1	1	6	3	2	1	3	1	
(2)		テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ					
		2	2	7	2	2	6					

【解説】

$f(x)$ は $x < -1, -1 \leq x < 2, 2 \leq x$ の各区間において整式で表されるので、 $f(x)$ は $x < -1, -1 < x < 2, 2 < x$ において微分可能である。よって、 $f(x)$ がすべての実数 x において微分可能であるのは、 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ が存在するときである。すなわち、

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つときである。このときまず、 $f(x)$ は $x = -1, 2$ で連続であるので、

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = f(-1) \qquad \cdots \textcircled{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2) \qquad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。このとき、 $\textcircled{3}$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) &= f(-1) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1-0} (-2x + a) &= b \cdot (-1)^2 - (-1) - 3b + 2c \\ \Leftrightarrow -2 \cdot (-1) + a &= b \cdot (-1)^2 - (-1) - 3b + 2c \\ \Leftrightarrow a + 2 &= -2b + 2c + 1 \qquad \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

である。また、 $\textcircled{4}$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= f(2) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2-0} (bx^2 - x - 3b + 2c) &= (1 - c) \cdot 2^3 + 4b \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7c - 5d \\ \Leftrightarrow b \cdot 2^2 - 2 - 3b + 2c &= (1 - c) \cdot 2^3 + 4b \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7c - 5d \\ \Leftrightarrow b + 2c - 2 &= 16b - c - 5d + 2 \qquad \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\textcircled{1}$ について考える。 $\textcircled{5}$ を用いると $\textcircled{1}$ の左辺は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{-2x + a - \{b \cdot (-1)^2 - (-1) - 3b + 2c\}}{x - (-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{-2x + a - (-2b + 2c + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{-2x + a - (a + 2)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{-2x - 2}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{-2(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-0} -2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

であり、 $\textcircled{1}$ の右辺は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{bx^2 - x - 3b + 2c - (-2b + 2c + 1)}{x - (-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{bx^2 - x - b - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{(bx - b - 1)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+0} (bx - b - 1) \\ &= b \cdot (-1) - b - 1 \\ &= -2b - 1 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \\ \Leftrightarrow -2 &= -2b - 1 \\ \therefore b &= \frac{1}{2} \qquad \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。続いて、 $\textcircled{2}$ について考える。 $\textcircled{6}$ 、 $\textcircled{7}$ を用いると $\textcircled{2}$ の左辺は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{bx^2 - x - 3b + 2c - \{(1 - c) \cdot 2^3 + 4b \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7c - 5d\}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{bx^2 - x - 3b + 2c - (16b - c - 5d + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{bx^2 - x - 3b + 2c - (b + 2c - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{bx^2 - x - 4b + 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{\frac{1}{2} \cdot x^2 - x - 4 \cdot \frac{1}{2} + 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - x}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{\frac{1}{2}x(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

であり、 $\textcircled{2}$ の右辺は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(1 - c)x^3 + 4bx^2 - 3x + 7c - 5d - (16b - c - 5d + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(1 - c)x^3 + 4bx^2 - 3x - 16b + 8c - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(1 - c)x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3x - 16 \cdot \frac{1}{2} + 8c - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(1 - c)x^3 + 2x^2 - 3x + 8c - 10}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x - 2)\{(1 - c)x^2 + (4 - 2c)x + 5 - 4c\}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \{(1 - c)x^2 + (4 - 2c)x + 5 - 4c\} \\ &= (1 - c) \cdot 2^2 + (4 - 2c) \cdot 2 + 5 - 4c \\ &= -12c + 17 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ \Leftrightarrow 1 &= -12c + 17 \\ \therefore c &= \frac{4}{3} \qquad \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{5}$ 、 $\textcircled{7}$ 、 $\textcircled{8}$ より、

$$\begin{aligned} a + 2 &= -2b + 2c + 1 \\ \Leftrightarrow a + 2 &= -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{4}{3} + 1 \\ \therefore a &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。また、 $\textcircled{6}$ 、 $\textcircled{7}$ 、 $\textcircled{8}$ より、

$$\begin{aligned} b + 2c - 2 &= 16b - c - 5d + 2 \\ \Leftrightarrow -15b + 3c + 5d - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -15 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{4}{3} + 5d - 4 &= 0 \\ \therefore d &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

(1)

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{4}{3}, d = \frac{3}{2} \text{ より,}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + \frac{2}{3} & (x < -1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{7}{6} & (-1 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{11}{6} & (2 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるので、 $f(x)$ を x で微分すると、

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & (x < -1 \text{ のとき}) \\ x - 1 & (-1 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ -x^2 + 4x - 3 & (2 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。このとき、 $f'(x) = 0$ となる x を考える。 $x < -1$ のとき、 $f'(x) < 0$ である。 $-1 \leq x < 2$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

であり、これは $-1 \leq x < 2$ を満たす。 $2 \leq x$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^2 + 4x - 3 \\ &= -(x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

であり、 $2 \leq x$ より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

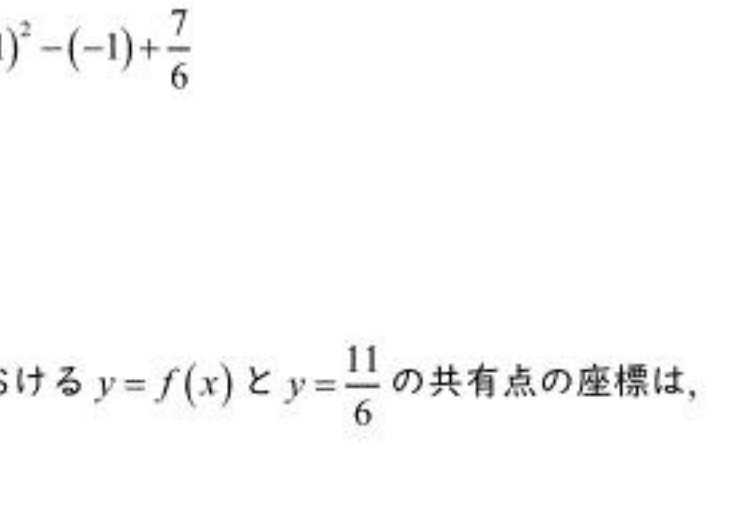
である。よって、増減表は以下の通りである。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x = 1$ で極小値を取り、 $x = 3$ で極大値を取る。その値は、

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 + \frac{7}{6} \\ &= \frac{2}{3} \\ f(3) &= -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + \frac{11}{6} \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

である。したがって、 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下の通りである。



$y = f(x)$ と $y = k$ の相異なる共有点の個数が $f(x) = k$ の相異なる実数解の個数であるので、 $f(x) = k$ が相異なる3個の実数解をもつとき、 k のとりうる値の範囲は、図より、

$$\frac{2}{3} < k < \frac{11}{6}$$

である。また、 α のとりうる値の範囲を考える。 $y = f(x)$ と $y = k$ の共有点の x 座標のうち小さい順に α, β, γ であるので、 $\alpha < 1, 1 < \beta < 3, 3 < \gamma$ である。 $x < 1$ における $y = f(x)$ と $y = \frac{11}{6}$ の共有点の座標を求める。 $x < 1$ において、 $y = f(x)$ の式が変わる $x = -1$ における点の座標を求めると、

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - (-1) + \frac{7}{6} \\ &= \frac{8}{3} \\ &> \frac{11}{6} \end{aligned}$$

であるので、 $x < 1$ における $y = f(x)$ と $y = \frac{11}{6}$ の共有点の座標は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{11}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{7}{6} &= \frac{11}{6} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $x < 1$ であるので、

$$x = \frac{3 - \sqrt{21}}{3}$$

である。よって、 α のとりうる値の範囲は、

$$\frac{3 - \sqrt{21}}{3} < \alpha < 1$$

である。

(2)

点 P における C の接線のグラフの傾きは、

$$\begin{aligned} f'(2) &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

より、法線のグラフの傾きは、

$$\frac{-1}{1} = -1$$

である。法線のグラフと平行で、 C と $2 < x < 4$ において共有点をもつ直線のうち、法線のグラフから最も遠いものと C の共有点が点 R である。そのような直線は C と接するので、微分係数 $f'(x)$ が $2 < x < 4$ において -1 と一致する点の座標を求めると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 &= -1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $2 < x < 4$ より、

$$x = 2 + \sqrt{2}$$

である。このとき点 R の y 座標は、

$$\begin{aligned} f(2) &= -\frac{1}{3} \cdot (2 + \sqrt{2})^3 + 2 \cdot (2 + \sqrt{2})^2 - 3 \cdot (2 + \sqrt{2}) + \frac{11}{6} \\ &= \frac{7 + 2\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

である。よって、点 R の座標は、

$$\text{R} \left(2 + \sqrt{2}, \frac{7 + 2\sqrt{2}}{6} \right)$$

となる。

