

数 学 (70分)

I 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は16ページあります。ただし、出題ページは下記のとおりです。
4, 6, 8, 10, 12ページ
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督員に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 受験番号欄
受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
 - ② 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
- 5 試験開始後30分間および試験終了前5分間は退出できません。
- 6 この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。この問題冊子は試験終了後回収します。

II 解答上の注意

- 1 「解答上の注意」が、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

受 験 番 号			

(問題は次ページから始まる)

1 次の問いに答えなさい。

- (1) (i) 方程式 $4^x - 2^{x+3} + 9^{\log_3 4} - 4 = 0$ ……(*) の解を求めたい。 $t = 2^x$ とおくと, (**) は $t^2 - \boxed{\text{ア}} t + \boxed{\text{イウ}} = 0$ と表される。これを t について解くと, $t = \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}$ (ただし $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$) である。したがって, (**) の解は, $x = \boxed{\text{カ}}, \log_2 \boxed{\text{キ}}$ である。

- (ii) a は $a > 0, a \neq 1$ を満たす定数とする。 x の不等式

$$\log_a(x-3) - \log_{a^2}(5-x) < \log_a \sqrt{x}$$

の解は

$$a > 1 \text{ のとき } \boxed{\text{ク}} < x < \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < x < \boxed{\text{ス}}$$

である。

- (2) i を虚数単位とし, $\alpha = -2 + 2\sqrt{3}i, \beta = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ とする。

$0 \leq \arg \alpha < 2\pi, 0 \leq \arg \beta < 2\pi$ として, α と β を極形式で表すと

$$\alpha = \boxed{\text{セ}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \pi \right)$$

$$\beta = \frac{1}{\boxed{\text{チ}}} \left(\cos \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \pi \right)$$

となる。

複素数平面における原点を O とする。自然数 n に対して, 複素数 $4\beta^{n-1}$ と $\alpha\beta^{n-1}$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ A_n と B_n で表すことにする。三角形 OA_nB_n の周と内部の領域を D_n とし, 領域 $D_1, D_2, \dots, D_n$ の和集合の表す領域の面積を

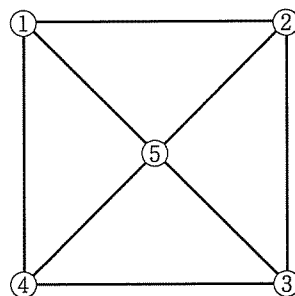
S_n とする。 D_2 の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ であり, $S_2 = \frac{\boxed{\text{ナ}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

また, $S_n = S_{n-1}$ を満たす最小の自然数 $n (n \geq 2)$ の値は $n = \boxed{\text{ネ}}$ である。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

- 2 右図のような正方形があり、2本の対角線が引かれている。4つの頂点と対角線の交点に、図のように①から⑤の番号が打たれ、それらに1個ずつ、合計5個の白石が置かれている。1個のサイコロを投げ、出た目が1から5のときは、その目と同じ番号にある石を、それが白石ならば黒石に、黒石ならば白石に置きかえ、出た目が6のときはいずれの石も置きかえない、という試行を行う。



n は正の整数とする。

- (1) 「 n 回の試行の後、3点①, ⑤, ③にある石がすべて同色である確率」を a_n とす

る。 $a_1 = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$, $a_2 = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。 a_{n+1} を a_n を用いて表すと、

$$a_{n+1} = \frac{1}{\text{オ}} a_n + \frac{1}{\text{カ}} \quad \text{であるから,} \quad a_n = \frac{1}{\text{キ}} \left(1 + \frac{1}{\text{ク}}^{n-1} \right)$$

である。

- (2) 「 n 回の試行の後、3点①, ⑤, ③にある石がすべて同色であるか、または3点②, ⑤, ④にある石がすべて同色である確率」を b_n として、 b_4 を求めたい。

n 回の試行の後、5点①, ②, ③, ④, ⑤に置かれた5個の石について、すべて同色である確率を p_n , 黒石が1個または4個である確率を q_n , 黒石が2個または3個である確率を r_n とすると、 $p_n + q_n + r_n = 1$ であり

$$p_{n+1} = \frac{1}{\text{ケ}} p_n + \frac{1}{\text{コ}} q_n$$

$$q_{n+1} = \frac{\text{サ}}{\text{シ}} p_n + \frac{\text{ス}}{\text{セ}} q_n + \frac{\text{ソ}}{\text{タ}} r_n$$

が成り立つ。

p_4 を求めると、 $p_4 = \frac{\text{チ}}{\text{ツテ}}$ となる。 p_4 および a_4 の値を用いて計算すると、

$$b_4 = \frac{\text{ト}}{\text{ナ}} \quad \text{である。}$$

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

- 3 点 O を原点とする座標空間に 4 点 $A(4, -5, 2)$, $B(4, -2, 5)$, $C(-1, -1, 4)$, $D(1, 1, 5)$ がある。点 P を直線 AB 上の動点, 点 Q を直線 CD 上の動点とし, $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CQ} = q\overrightarrow{CD}$ (p, q は実数) とおく。

- (1) 3 点 O, P, Q が一直線上にあるとき

$$p = \boxed{\text{ア}}, q = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

- (2) 直線 PQ が直線 AB に垂直であるとき

$$\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}p + q = 0$$

が成り立つ。

- (3) 線分 PQ の長さが最小となるような P, Q の座標は

$$P(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}), Q(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}})$$

である。

2 点 P_1, Q_1 を

$$P_1(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}), Q_1(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}})$$

とする。このとき, 2 平面 P_1Q_1A, P_1Q_1C のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると

$$\theta = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \pi$$

である。

ただし, 2 平面 α, β が平行でないとき, 2 平面 α, β のなす角とは, 2 平面の交線 l 上の 1 点を T とし, 平面 α, β 上における, T を通り l に垂直な直線をそれぞれ m_α, m_β としたとき, 2 直線 m_α, m_β のなす角である。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

4 a, b, c, d を実数の定数とし、関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} -2x+a & (x < -1 \text{ のとき}) \\ bx^2-x-3b+2c & (-1 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ (1-c)x^3+4bx^2-3x+7c-5d & (2 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ がすべての実数 x において微分可能であるとき

$$a = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad b = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad c = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \quad d = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。以下、この条件のもとで考える。

(1) 方程式

$$f(x) = k \quad (k \text{ は実数の定数})$$

が相異なる 3 個の実数解 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) をもつとき、 k のとりうる値の範囲

$$\text{は } \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} < k < \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}} \text{ である。また、} k \text{ がこの範囲を動くとき、} \alpha \text{ のとり}$$

$$\text{うる値の範囲は } \frac{\boxed{\text{セ}} - \sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}} < \alpha < \boxed{\text{ツ}} \text{ である。}$$

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフを C とし、 C 上に点 $P(2, f(2))$ をとる。点 P における C の法線と C との交点のうち、 $x < 0$ の部分にあるものを Q とする。 C 上の $2 < x < 4$ の部分に点 R をとるとき、三角形 QPR の面積が最大となるときの R の座標は

$$R \left(\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}, \frac{\boxed{\text{ナ}} + \boxed{\text{ニ}} \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} \right)$$

である。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

5 2つの関数

$$y = ax^2 + 1 \quad (a \text{ は実数の定数})$$

$$y = 2\log x$$

のグラフをそれぞれ C_1 , C_2 とする。2 曲線 C_1 , C_2 はただ 1 点を共有し、その点にお

いて共通な接線をもっている。このとき、定数 a の値は $a = \frac{\boxed{\text{ア}}}{e^{\boxed{\text{イ}}}}$ である。以下、

この条件のもとで考える。

- (1) 2 曲線 C_1 , C_2 および直線 $x = 1$ で囲まれた図形を D とする。

D の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} e - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}} e^{\boxed{\text{キ}}}} - \boxed{\text{ク}}$$

である。

また、 D を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \left(e^{\boxed{\text{サ}}} - \frac{\boxed{\text{シ}}}{e^{\boxed{\text{ス}}}} - \boxed{\text{セ}} \right) \pi$$

である。

- (2) 曲線 C_2 の $\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{3}$ の部分の長さを L とすると、 L は定積分

$$\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^{\boxed{\text{ソ}}} + \boxed{\text{タ}}}}{x} dx$$

で求められる。

$\sqrt{x^{\boxed{\text{ソ}}} + \boxed{\text{タ}}} = t$ とおいて置換積分を行うと、

$$L = \boxed{\text{チ}} + \log \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(下 書 き 用 紙)

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がない限り, 数字 (0～9), 符号 (－, ±), 自然対数の底 (e) のいずれかが入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つが, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

なお, 解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は, それぞれ大問の番号を表します。

例1 アイウ に -83 と答えたいとき。

1	解 答 欄												
	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

分数形で解答する場合は, 既約分数で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解 答 欄												
	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
カ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐