

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	2	2	3	5	4	6	2	3	5	2	1	6
	ス	セ	ソ									
	7	2	3									
(2)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ				
	1	5	3	2	6	1	1	3				

【解説】

(1)

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2$ に代入すると、

$$\begin{aligned}
 7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 &= 7r^2 \cos^2 \theta + 4\sqrt{3}r^2 \sin \theta \cos \theta + 3r^2 \sin^2 \theta \\
 &= 3r^2 + 4r^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + 2\sqrt{3}r^2 \sin 2\theta \\
 &= r^2 (2 \cos 2\theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta + 5) \\
 &= r^2 \left\{ 4 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) + 5 \right\}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 \left\{ 4 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) + 5 \right\} = 4$ であり、 $-1 \leq$

$\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ より $4 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) + 5 \geq 1$ 、すなわち $4 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) + 5 \neq 0$ であるから、

$$r^2 = \frac{4}{4 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) + 5}$$

である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{25}{6}\pi$ であるから、 r が最大となるのは、

$\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) = -1$ のとき、すなわち

$$\begin{aligned}
 2\theta + \frac{\pi}{6} &= \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \\
 \therefore \theta &= \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi
 \end{aligned}$$

のときである。このとき、 $r > 0$ より

$$r = \sqrt{\frac{4}{-4+5}} = 2$$

である。また、 r が最小となるのは、 $\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) = 1$ のとき、すなわち

$$\begin{aligned}
 2\theta + \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \\
 \therefore \theta &= \frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi
 \end{aligned}$$

のときである。このとき、

$$r = \sqrt{\frac{4}{4+5}} = \frac{2}{3}$$

である。

(2)

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = k(x-1) + 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

について、式②を式①に代入すると、

$$\begin{aligned}
 x^2 - \{k(x-1) + 3\}^2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow x^2 - k^2(x-1)^2 - 6k(x-1) - 9 &= 1 \\
 \Leftrightarrow (1-k^2)x^2 + 2(k^2-3k)x - k^2 + 6k - 10 &= 0 \quad \dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

となり、①と②の共有点の個数は、方程式③の実数解の個数と一致する。

[1] $1-k^2=0$ のとき、すなわち $k=\pm 1$ のとき

$k^2-3k \neq 0$ であるから、方程式③はただ1つの実数解を持つ。

[2] $1-k^2 \neq 0$ のとき、すなわち $k \neq \pm 1$ のとき

方程式③がただ1つの実数解を持つ条件は、判別式を D として、 $D=0$ となることであり、

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= (k^2-3k)^2 - (1-k^2)(-k^2+6k-10) \\
 &= (k^4-6k^3+9k^2) - (k^4-6k^3+9k^2+6k-10) \\
 &= -6k+10
 \end{aligned}$$

であるから、

$$D=0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}$$

となる。また、これは $k \neq \pm 1$ を満たしている。

以上、[1]、[2]より、 H と ℓ がただ1つの共有点を持つのは $k=\pm 1, \frac{5}{3}$ のときである。ここで、

$k \neq \pm 1, \frac{5}{3}$ のとき、式(3)の解を α, β とすると、

解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{2k^2-6k}{k^2-1}$$

となる。A, B, Q は ℓ 上の点であるから、 $AQ=BQ$ となるのは、A, B, Q の x 座標に着目して、

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$ となるときである。したがって、

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha+\beta}{2} &= 1 \\
 \Leftrightarrow 2k^2-6k &= 2(k^2-1) \\
 \Leftrightarrow k &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

である。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
2	1	1	1	0	2	5	2	1	1	1	0
ス	セ	ソ	タ	チ	ツ						
1	2	1	－	3	2						

【解説】

 $t = 2^{x+y} + 2^{-x-y}$ とおいたとき、

$$t^2 = 4^{x+y} + 4^{-x-y} + 2$$

$$\begin{aligned} t^3 &= 2^{3x+3y} + 2^{-3x-3y} + 3 \cdot 2^{2x+2y} \cdot 2^{-x-y} + 3 \cdot 2^{x+y} \cdot 2^{-2x-2y} \\ &= 2^{3x+3y} + 2^{-3x-3y} + 3 \cdot 2^{x+y} + 3 \cdot 2^{-x-y} \\ &= 2^{3x+3y} + 2^{-3x-3y} + 3t \end{aligned}$$

となる。これを不等式①の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} &2^{3x+3y+1} + 2^{-3x-3y+1} + 4^{x+y} + 4^{-x-y} - 5(2^{x+y} + 2^{-x-y}) - 8 \\ &= 2(t^3 - 3t) + (t^2 - 2) - 5t - 8 \\ &= 2t^3 + t^2 - 11t - 10 \end{aligned}$$

となる。したがって①は、

$$\begin{aligned} &2t^3 + t^2 - 11t - 10 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1)(2t-5)(t+2) \leq 0 \end{aligned}$$

となるから、 t の取りうる値の範囲は、

$$t \leq -2, \quad -1 \leq t \leq \frac{5}{2} \quad \cdots (\text{ア})$$

である。次に、 $2^{x+y} > 0, 2^{-x-y} > 0$ なので、相加平均と相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} 2^{x+y} + 2^{-x-y} &\geq 2\sqrt{2^{x+y} \cdot 2^{-x-y}} \\ &\Leftrightarrow t \geq 2 \quad \cdots (\text{イ}) \end{aligned}$$

が成り立つ。また、等号が成立するのは $2^{x+y} = 2^{-x-y}$ のときで、

$$\begin{aligned} 2^{x+y} &= 2^{-x-y} \\ &\Leftrightarrow x+y = -x-y \\ &\Leftrightarrow x+y = 0 \end{aligned}$$

となり、このような実数 x, y は存在する。以上(ア)、(イ)より、求める t の値の範囲は、

$$2 \leq t \leq \frac{5}{2}$$

である。また、 $u = 2^{x+y}$ とおくと、 $u > 0$ であり、 $t = u + \frac{1}{u}$ であるから、

$$\begin{aligned} 2 &\leq u + \frac{1}{u} \leq \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 - 5u + 2 &\leq 0 \\ u^2 - 2u + 1 &\geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2u-1)(u-2) &\leq 0 \\ (u-1)^2 &\geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq u \leq 2 \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $2^{-1} \leq 2^{x+y} \leq 2^1$ なので、

$$-1 \leq x+y \leq 1 \quad \cdots (\text{ウ})$$

が得られる。次に、不等式②について、真数条件と底の条件から、

$$x > 0 \quad \cdots (\text{エ})$$

が必要である。また

$$\begin{aligned} \log_x 8 &= 3 \log_x 2 \\ &= \frac{3}{\log_2 x} \end{aligned}$$

であるから、 $s = \log_2 x$ とおくと、②は

$$\begin{aligned} s^2 &\leq 2s - \frac{3}{s} \\ &\Leftrightarrow \frac{s^3 - 2s^2 + 3}{s} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(s+1)(s^2 - 3s + 3)}{s} \leq 0 \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $s^2 - 3s + 3 = \left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ より、②は

$$s \neq 0 \text{ かつ } s(s+1) \leq 0$$

と同値である。したがって、 s の取りうる値の範囲は、

$$-1 \leq s < 0$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{1}{2} &\leq \log_2 x < \log_2 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \quad \cdots (\text{オ}) \end{aligned}$$

となり、これは(エ)を満たす。さらに、 $3x+2y$ について、 $3x+2y = x+2(x+y)$ であるから、(ウ)より

$$3x+2y \geq x-2$$

となり、(オ)より

$$x-2 \geq -\frac{3}{2}$$

となるから、 $3x+2y \geq -\frac{3}{2}$ が成り立つ。一方、(ウ)、(オ)を満たす x, y のうち、

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

について、

$$3x+2y = -\frac{3}{2}$$

となるから、 $3x+2y$ の最小値は $-\frac{3}{2}$ である。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	2	1	5	1	5	2	1	5	4	1	5	2	5
(2)	セ	ソ	タ	チ	ツ								
	3	1	1	0	5								

【解説】

(1)

6個の玉による円順列は、

$$\frac{6!}{6} = 5! = 120 \text{ (通り)}$$

である。

(i)

白 k と赤 k をあわせて1組と考えると、3組の円順列は、

$$\frac{3!}{3} = 2 \text{ (通り)}$$

である。また、白 k と赤 k の並べ方はそれぞれ2通りあるので、求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 2^3}{120} = \frac{2}{15}$$

である。

(ii)

白1の場所を決めると、赤1の場所も決まるので、白1と赤1が向き合うときの並べ方は5個の球の円順列と考えて良い。したがって、並べ方は

$$\frac{5!}{5} = 24 \text{ (通り)}$$

となるので、求める確率は、

$$\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

である。以下、白1の場所を固定し、白1をおいた場所から時計回りに a, b, c, d, e とおく。白1と赤1が向き合うとき、赤1の場所は c となる。このとき、白2と赤2、白3と赤3がそれぞれ隣り合わないような並べ方は $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ (通り)考えられるので、求める確率は、

$$\frac{16}{120} = \frac{2}{15} \quad \cdots \text{①}$$

である。次に、どの同じ番号の玉も隣り合わないときについて考える。まず、白1と赤1が隣り合わないのは、赤1が b, c, d にあるときである。[1] 赤1が c にあるとき①と同様に、求める確率は $\frac{2}{15}$ である。[2] 赤1が b にあるとき白2と赤2の並べ方の組み合わせは、 $(a, d), (c, e)$ の2通りである。この組み合わせそれぞれに2通りずつあり、残りの白3と赤3の並べ方も2通りずつあるので、求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{120} = \frac{1}{15}$$

となる。

[3] 赤1が d にあるとき[2]と同様に、求める確率は $\frac{1}{15}$ である。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は、

$$\frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

となる。

(iii)

余事象を考える。同じ番号の玉がすべて隣り合う確率は、(i)より $\frac{2}{15}$ である。次に、同じ番号

の玉がちょうど2組隣り合うとき、残りの1組は向かい合っているので、求める確率は、

$$3 \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 2^2}{120} = \frac{1}{5}$$

となる。また、どの同じ番号の玉も隣り合わないときの確率は、(ii)より $\frac{4}{15}$ である。以上よ

り、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{4}{15} \right) = \frac{2}{5}$$

である。

(2)

余事象を考える。同じ番号の玉が少なくとも n 組隣り合うような確率を q_n とすると、求める確率 P は、包除原理を応用して、

$$P = 1 - (q_1 - q_2 + q_3 - q_4)$$

と表される。ここで q_n について、隣り合う番号を選ぶ組み合わせが ${}_4C_n$ 通り、隣り合う組を一つのまとまりとした場合の円順列の並べ方が $\{(8-n)-1\}!$ 通り、さらに隣り合う組の一つのまとまりの中での並べ方が 2^n 通りあり、さらに円順列の並べ方の総数は $(8-1)! = 7!$ 通りであるから、

$$q_n = \frac{{}_4C_n \cdot 2^n \cdot (7-n)!}{7!}$$

となる。したがって求める確率は、

$$\begin{aligned} P &= 1 - (q_1 - q_2 + q_3 - q_4) \\ &= 1 - \left\{ 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{7} - 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{42} + 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{210} - 1 \cdot 16 \cdot \frac{1}{840} \right\} \\ &= 1 - \frac{74}{105} \\ &= \frac{31}{105} \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	8	1	1	3	0	3	2	7	5
(2)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	5	9	4	9	8	1	5	0	
(3)	ツ	テ	ト						
	3	5	2						

【解説】

(1)

点Oから辺ABに下ろした垂線の足を点Hとすると、HはABの中点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AO}) \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$ より、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= 8\end{aligned}$$

である。同様に、 $\overrightarrow{AC}$ について、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= \frac{25}{2}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} &= 8 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}) &= 8 \\ \Leftrightarrow 16k + 5l &= 8 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} &= \frac{25}{2} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}) &= \frac{25}{2} \\ \Leftrightarrow 5k + 25l &= \frac{25}{2}\end{aligned}$$

となる。この2式を連立させて解くと、 $k = \frac{11}{30}$, $l = \frac{32}{75}$ となるので、

$$\overrightarrow{AO} = \frac{11}{30} \overrightarrow{AB} + \frac{32}{75} \overrightarrow{AC}$$

と表される。

(2)

三角形DBCの面積が最大となるのは、点Dが辺BCの中点となるときである。このとき、円周角の定理より、 $\angle BAD = \angle CAD$ なので、AEは $\angle BAD$ の二等分線となる。したがって、 $BE:EC = 4:5$ より、

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{9} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{9} \overrightarrow{AC}$$

である。また、ODはBCの中点を通り、点Oは三角形ABCの外心なので、 $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{BC}$ である。このとき、 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ なので、 $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AE}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AO}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{5}{9}t - \frac{11}{30} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{4}{9}t - \frac{32}{75} \right) \overrightarrow{AC} \right\} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow - \left(\frac{5}{9}t - \frac{11}{30} \right) \cdot 16 + \left(\frac{4}{9}t - \frac{32}{75} \right) \cdot 25 + \left(\frac{1}{9}t + \frac{3}{50} \right) \cdot 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{25}{9}t - \frac{9}{2} &= 0 \\ \therefore t &= \frac{81}{50}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\overrightarrow{AD} = \frac{81}{50} \overrightarrow{AE} = \frac{9}{10} \overrightarrow{AB} + \frac{18}{25} \overrightarrow{AC} \text{ より、}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO} = \frac{8}{15} \overrightarrow{AB} + \frac{22}{75} \overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、ODとBCの交点をMとすると、 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ なので、

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} = \frac{2}{15} \overrightarrow{AB} + \frac{11}{150} \overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②より、 $\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$ 、つまり $OM:MD = 1:3$ である。さらに $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$ より△ODPは直角三角形であり、Mは弦の中点であるから、 $OM \perp MP$ である。これらより、△OMPと△PMDに関して相似の関係が成り立ち、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OM}| : |\overrightarrow{MP}| &= |\overrightarrow{PM}| : |\overrightarrow{MD}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| : |\overrightarrow{MP}| &= |\overrightarrow{PM}| : 3|\overrightarrow{OM}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{MP}|^2 &= 3|\overrightarrow{OM}|^2 \\ \therefore |\overrightarrow{MP}| &= \sqrt{3}|\overrightarrow{OM}|\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MP}| &= \sqrt{3}|\overrightarrow{OM}| \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{4}{225} |\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 11}{15 \cdot 150} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{121}{150^2} |\overrightarrow{AC}|^2} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 16}{225} + \frac{44 \cdot 5}{15 \cdot 150} + \frac{121 \cdot 25}{150^2}} \\ &= \frac{\sqrt{31}}{2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる。ここで、三角形ABCについて、余弦定理より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}} \\ &= \sqrt{16 + 25 - 10} \\ &= \sqrt{31}\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}\frac{CP}{BP} &= \frac{BC - BP}{BP} \\ &= \frac{BC}{BM + MP} - 1 \\ &= \frac{BC}{\frac{1}{2}BC + MP} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{31}}{\frac{\sqrt{31}}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2\sqrt{5}}} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

である。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ								
	0	－	1	2	8	2								
(2)	キ	ク	ケ	コ										
	2	2	4	2										
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	
	2	4	e	2	e	2	e	2	2	4	e	2	1	

【解説】

(1)

 $0 \leq x < 1$ のとき、

$$[x] = \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = 0$$

であるから、 $f(x) = 0$ である。また、 $1 \leq x < 2$ のとき、

$$[x] = 1, \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = 0, \left| \cos \frac{\pi}{2}x \right| = -\cos \frac{\pi}{2}x$$

であるから、

$$f(x) = \frac{-1}{2} \cos \frac{\pi}{2}x$$

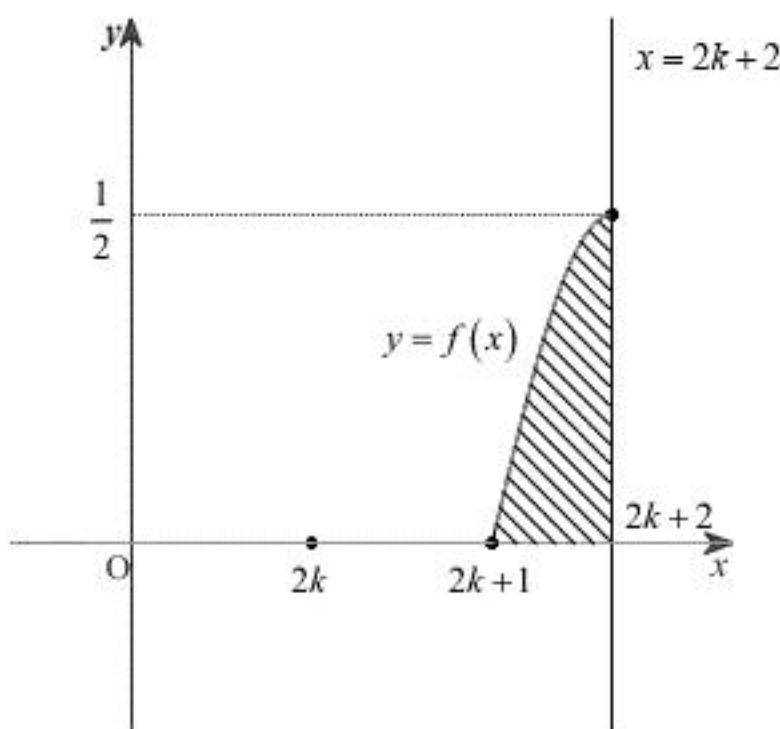
となる。以下、 k を 0 以上の整数とする。[1] $2k \leq x < 2k+1$ のとき

$$[x] = 2k, \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = k \text{ であるから、 } f(x) = 0 \text{ となる。}$$

[2] $2k+1 \leq x < 2k+2$ のとき

$$[x] = 2k+1, \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = k, \left| \cos \frac{\pi}{2}x \right| = (-1)^{k+1} \cos \frac{\pi}{2}x \text{ であるから、}$$

$$f(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{2} \cos \frac{\pi}{2}x$$

以上、[1]、[2]より、 $2k \leq x < 2k+2$ での $y = f(x)$ と $x = 2k+2$ のグラフは以下の図のようになる。このとき、 V_{k+1} は図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積であるから、

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_1^2 \pi \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}x \right)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{\cos \pi x + 1}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2\pi} \sin \pi x \right]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

となる。また、任意の正の整数 n に対して、 $V_n = V_1$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4n} V_k &= 4n \cdot V_1 \\ &= \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(e^{-x} \cos \frac{\pi}{2}x \right) &= -e^{-x} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} e^{-x} \sin \frac{\pi}{2}x \\ \frac{d}{dx} \left(e^{-x} \sin \frac{\pi}{2}x \right) &= -e^{-x} \sin \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos \frac{\pi}{2}x \end{aligned}$$

であり、 $e^{-x} \sin \frac{\pi}{2}x$ を消去すると、

$$\left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) e^{-x} \cos \frac{\pi}{2}x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} e^{-x} \sin \frac{\pi}{2}x - e^{-x} \cos \frac{\pi}{2}x \right)$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos \frac{\pi}{2}x dx &= \frac{4}{\pi^2 + 4} \left(\frac{\pi}{2} e^{-x} \sin \frac{\pi}{2}x - e^{-x} \cos \frac{\pi}{2}x \right) + C \\ &= \frac{2\pi}{\pi^2 + 4} e^{-x} \sin \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi^2 + 4} e^{-x} \cos \frac{\pi}{2}x + C \\ &= \frac{2e^{-x}}{\pi^2 + 4} \left(\pi \sin \frac{\pi}{2}x - 2 \cos \frac{\pi}{2}x \right) + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

(3)

(1)の図を利用すると、 T_n は、

$$T_n = \int_{2n-1}^{2n} e^{-x} \left(\frac{(-1)^n}{2} \cos \frac{\pi}{2}x \right) dx$$

と表せるので、(2)より、

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2e^{-x}}{\pi^2 + 4} \left(\pi \sin \frac{\pi}{2}x - 2 \cos \frac{\pi}{2}x \right) \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{\pi^2 + 4} (2e^{-2} - \pi e^{-1}) \\ &= \frac{1}{\pi^2 + 4} \left(\frac{\pi}{e} - \frac{2}{e^2} \right) \end{aligned}$$

となる。また、 $f(x) = f(x+2)$ より、

$$\begin{aligned} e^{-(x+2)} f(x+2) &= e^{-2} \cdot e^{-x} f(x+2) \\ &= e^{-2} (e^{-x} f(x)) \end{aligned}$$

となるから、

$$T_{n+1} = e^{-2} T_n$$

が成り立つ。したがって、 T_n は初項 T_1 、公比 e^{-2} の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n &= \frac{T_1}{1 - e^{-2}} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2}} \cdot \frac{1}{\pi^2 + 4} \left(\frac{\pi}{e} - \frac{2}{e^2} \right) \\ &= \frac{e\pi - 2}{(\pi^2 + 4)(e^2 - 1)} \end{aligned}$$

である。