

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	1	6	8	5	4	3	2	1	8	1	2
(2)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
	4	9	2	2	2	－	2	8	8	8	9	6

【解説】

(1)

1回の試行をしたとき、1が書かれたカードを取り出す確率は $\frac{1}{2}$ 、2が書かれたカードを取り出す確率は $\frac{1}{3}$ 、3が書かれたカードを取り出す確率は $\frac{1}{6}$ である。 $S=7$ となるのは、6回の試行において2が書かれたカードを1回、1が書かれたカードを5回取り出すときであるから、その確率は

$${}_6C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$$

となる。 $S=9$ となるときは、6回の試行において

「3を1回、2を1回、1を4回取り出すとき」・・・①

「2を3回、1を3回取り出すとき」・・・②

の2通りがある。①となる確率は

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^4 \cdot 3}$$

であり、②となる確率は

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2 \cdot 3^3}$$

である。求める確率は①、②は互いに排反であるから

$$\frac{5}{2^4 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} = \frac{5(3^2 + 2^3)}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{5 \cdot 17}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{85}{432}$$

である。1が書かれたカードを4回以上連続して取り出すときは、6回の試行において

「1を6回連続して取り出すとき」・・・③

「1を5回だけ連続して取り出すとき」・・・④

「1を4回だけ連続して取り出すとき」・・・⑤

の3通りがある。③となる確率は、6回の試行すべてで1を取り出すから、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}$$

である。④について、5回連続1を取り出す初めの試行が1, 2回目の試行であり、それぞれ6, 1回目の試行において1以外が取り出されるから、④となる確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2^6}$$

となる。⑤について、4回連続1を取り出す初めの試行が2回目の試行のとき1, 6回目の試行で1以外が取り出され、4回連続1を取り出す初めの試行が1, 3回目の試行のときそれぞれ5, 2回目の試行で1以外が取り出されるから、⑤となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1+4}{2^6} = \frac{5}{2^6}$$

となる。したがって、③、④、⑤は互いに排反事象であるから、1が書かれたカードを4回以上連続して取り出す確率は

$$\frac{1}{2^6} + \frac{2}{2^6} + \frac{5}{2^6} = \frac{8}{2^6} = \frac{1}{8} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。6回の試行において1が書かれたカードを4回以上連続して取り出すという事象を A とし、6回の試行において S が偶数となる事象を B とすると、求める条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \dots \textcircled{7}$$

と表され、⑥より $P(A) = \frac{1}{8}$ である。 $P(A \cap B)$ を求めるために、③、④、⑤それぞれで S が偶数となる確率を考える。③のとき $S=6$ となるから、③かつ B となる確率は③となる確率そのものであり $\frac{1}{2^6}$ となる。④かつ S が偶数となるときについて、5回連続1を取り出す初めの試行が1, 2回目の試行であり、それぞれ6, 1回目の試行において3が取り出されるから、④かつ B となる確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{2^6 \cdot 3}$$

となる。⑤かつ S が偶数となるときについて、

[1] 4回連続1を取り出す初めの試行が1回目の試行のとき

6回の試行における取り出し方が、 $(1, 1, 1, 1, 2, 2)$ 、 $(1, 1, 1, 1, 3, 1)$ 、 $(1, 1, 1, 1, 3, 3)$ となるときだから、確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2^2 + 3 + 1}{2^6 \cdot 3^2} = \frac{8}{2^6 \cdot 3^2}$$

となる。

[2] 4回連続1を取り出す初めの試行が2回目の試行のとき

6回の試行における取り出し方が、 $(2, 1, 1, 1, 1, 2)$ 、 $(3, 1, 1, 1, 1, 3)$ となるときだから、確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2^2 + 1}{2^6 \cdot 3^2} = \frac{5}{2^6 \cdot 3^2}$$

となる。

[3] 4回連続1を取り出す初めの試行が3回目の試行のとき

[1]と同様にして、6回の試行における取り出し方が、 $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$ 、 $(1, 3, 1, 1, 1, 1)$ 、 $(3, 3, 1, 1, 1, 1)$ となるときだから、確率は $\frac{8}{2^6 \cdot 3^2}$ となる。

以上、[1]、[2]、[3]は互いに排反事象であるから、⑤かつ B となる確率は

$$\frac{8}{2^6 \cdot 3^2} + \frac{5}{2^6 \cdot 3^2} + \frac{8}{2^6 \cdot 3^2} = \frac{21}{2^6 \cdot 3^2} = \frac{7}{2^6 \cdot 3}$$

となる。したがって、

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2^6} + \frac{2}{2^6 \cdot 3} + \frac{7}{2^6 \cdot 3} = \frac{3+2+7}{2^6 \cdot 3} = \frac{3+2+7}{2^6 \cdot 3} = \frac{1}{16}$$

となるから、⑦より

$$P_A(B) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

となる。

(2)

$$0.24_{(6)} = 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{4}{9}$$

となる。ある正の数が $0.2_{(a)}$ 、 $0.12_{(b)}$ と表されるから、 a, b は3以上の自然数であり

$$0.2_{(a)} = 0.12_{(b)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{a} = 1 \cdot \frac{1}{b} + 2 \cdot \frac{1}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{b+2}{b^2}$$

である。ここで、 $b+2=c$ と $b \geq 3$ より c は5以上の自然数である。これを上式に代入すると

$$\frac{2}{a} = \frac{c}{(c-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(c^2 - 4c + 4) = ac$$

$$\Leftrightarrow c(-2c + 8 + a) = 8$$

となる。 $-2c + 8 + a$ は整数であり、 $c \geq 5$ であることから、8の約数を考えて $c=8$ である。よって、

$$-2c + 8 + a = 1$$

$$\therefore a = 9$$

となり、 $b=6$ となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ								
	2	4	2	8	3	2	4								
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	2	3	－	1	2	3	2	3	2	3	3	2	4	0	6

【解説】

(1)

 C_1, C_2 を積分定数として、

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \theta d\theta &= \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + C_1\end{aligned}$$

となり、また

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta &= \int (\sin \theta \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{8}\theta - \frac{1}{32}\sin 4\theta + C_2\end{aligned}$$

となる。

(2)

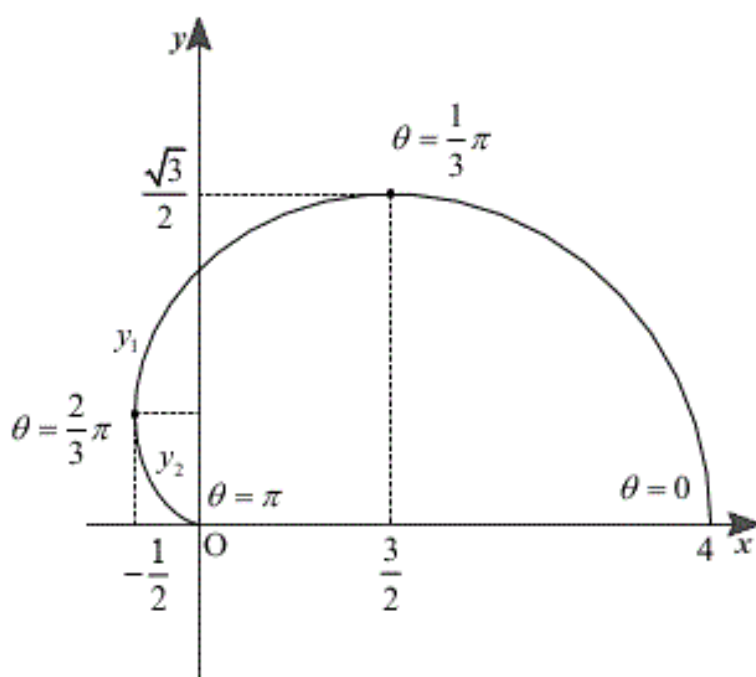
 $f(\theta) = 2(1 + \cos \theta)\cos \theta, g(\theta) = 2(1 + \cos \theta)\sin \theta$ を微分すると、

$$\begin{aligned}f'(\theta) &= 2(-\sin \theta)\cos \theta + 2(1 + \cos \theta)(-\sin \theta) \\ &= -2\sin \theta - 4\cos \theta \sin \theta \\ &= -4\sin \theta \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= 2(-\sin \theta)\sin \theta + 2(1 + \cos \theta)\cos \theta \\ &= 2\cos^2 \theta - 2\sin^2 \theta + 2\cos \theta \\ &= 4\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 2 \\ &= 4\left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right)(\cos \theta + 1)\end{aligned}$$

となるから、 $0 \leq \theta \leq \pi$ での $f(\theta), g(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0	...	$\frac{1}{3}\pi$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(\theta)$		－	－	－	0	＋	
$f(\theta)$	4	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
$g'(\theta)$		＋	0	－	－	－	
$g(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

したがって、曲線 C の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分で x 座標が最小となるのは $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のときで、その座標は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。また、 y 座標が最大となるのは $\theta = \frac{1}{3}\pi$ のときで、その座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ である。曲線 C の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分を図示すると次図のようになる。 x 軸に関する対称性より、曲線 C に囲まれた面積 S について、

$$\frac{S}{2} = \int_{-\frac{1}{2}}^4 y_1 dx - \int_{-\frac{1}{2}}^0 y_2 dx$$

となる。 $\frac{dx}{d\theta} = -4\sin \theta \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right)$ であり、 y_1 について

x	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	4
θ	$\frac{2}{3}\pi$	$\rightarrow$	0

であり、 y_2 について

x	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	0
θ	$\frac{2}{3}\pi$	$\rightarrow$	π

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_{-\frac{1}{2}}^4 y_1 dx - \int_{-\frac{1}{2}}^0 y_2 dx \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 2(1 + \cos \theta)\sin \theta \left\{ -4\sin \theta \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right) \right\} d\theta - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} 2(1 + \cos \theta)\sin \theta \left\{ -4\sin \theta \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right) \right\} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2(1 + \cos \theta)\sin \theta \cdot 4\sin \theta \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi} \left(\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{3}{2}\sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{2}\sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta + 12 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta + 4 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta\end{aligned}$$

と変形でき、(1)の結果を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= 8 \left[\frac{1}{8}\theta - \frac{1}{32}\sin 4\theta \right]_0^{\pi} + 12 \left[\frac{1}{3}\sin^3 \theta \right]_0^{\pi} + 4 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi} \\ &= 8 \cdot \frac{\pi}{8} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 3\pi \\ \therefore S &= 6\pi\end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	1	2	6	3	1	8	2	9	1	3
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
	2	3	1	2	3	4				
(3)	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ				
	9	1	4	2	7	7				

【解説】

(1)

OB=6, OC=4を用いると,

$$BC=2\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{BC}|^2=28$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=28$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2=28$$

$$\Leftrightarrow 16+36-28=2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=12$$

である。 S は三角形OBCの面積であるから,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{36\cdot 16-12^2}$$

$$=\frac{3\cdot 4}{2}\sqrt{4\cdot 1-1}$$

$$=6\sqrt{3}$$

である。また、 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 、 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ より平面OBCと $\overrightarrow{OA}$ は垂直である。ここで、 $\triangle OAB$ での三平方の定理より

$$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}$$

$$=3\sqrt{3}$$

であるから,

$$V=\frac{1}{3}S\cdot OA=18$$

となる。さらに、 $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ より,

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$$

$$=-\frac{5}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{9}\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{2}{9}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{3}{9}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

である。

(2)

2直線OP, AQが1点で交わる時、その交点を点Kとする。点Kは直線OP上にあるから、

実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{4}{9}k\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}k\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{OC}$$

と表せる。また、 $\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ であり、点Kは直線AQ上にもあるから、実数 u を

用いて

$$\overrightarrow{AK}=u\overrightarrow{AQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=-u\overrightarrow{OA}+su\overrightarrow{OB}+tu\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OK}=(1-u)\overrightarrow{OA}+su\overrightarrow{OB}+tu\overrightarrow{OC}$$

である。4点O, A, B, Cは四面体をなすから、係数を比較して

$$\begin{cases} \frac{4}{9}k=1-u \\ \frac{2}{9}k=su \\ \frac{1}{3}k=tu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2su=1-u \\ k=\frac{9}{4}(1-u) \\ \frac{s}{t}=\frac{2}{3}(\because t>0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{2s+1} \\ k=\frac{9s}{4s+2}(\because s>0) \\ \frac{s}{t}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

となる。 $|\overrightarrow{OQ}|=3\sqrt{3}$ のとき,

$$|\overrightarrow{OQ}|=3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}|^2=27$$

$$\Leftrightarrow s^2|\overrightarrow{OB}|^2+2st\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+t^2|\overrightarrow{OC}|^2=27$$

$$\Leftrightarrow 36\left(\frac{s}{t}\right)^2+24\frac{s}{t}+16=\frac{27}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow 36\cdot\frac{4}{9}+24\cdot\frac{2}{3}+16=\frac{27}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow t^2=\frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{3}{4}(\because t>0)$$

となる。このとき、 $s=\frac{1}{2}$ である。

(3)

 $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ である。点Lは平面DEQ上にあるから、実数 m, n を用いて,

$$\overrightarrow{OL}=m\overrightarrow{OD}+n\overrightarrow{OE}+(1-m-n)\overrightarrow{OQ}$$

$$=\frac{2}{5}m\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}n\overrightarrow{OB}+(1-m-n)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\frac{2}{5}m\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m+\frac{1}{6}n\right)\overrightarrow{OB}+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}m-\frac{3}{4}n\right)\overrightarrow{OC}$$

となる。また、点Lは直線OP上にあるから、実数 l を用いて、

$$\overrightarrow{OL}=l\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{4}{9}l\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}l\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}l\overrightarrow{OC}$$

と表せる。4点O, A, B, Cは四面体をなすから、係数を比較して

$$\begin{cases} \frac{2}{5}m=\frac{4}{9}l \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m+\frac{1}{6}n=\frac{2}{9}l \\ \frac{3}{4}-\frac{3}{4}m-\frac{3}{4}n=\frac{1}{3}l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}m=\frac{4}{9}l \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m+\frac{1}{6}n=\frac{2}{9}l \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n=\frac{2}{9}l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}m=\frac{2}{9}l \\ n=0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m=\frac{2}{9}l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l=\frac{9}{14} \\ m=\frac{5}{7} \\ n=0 \end{cases}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{OL}=\frac{9}{14}\overrightarrow{OP}$$

となる。ここで、

$$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

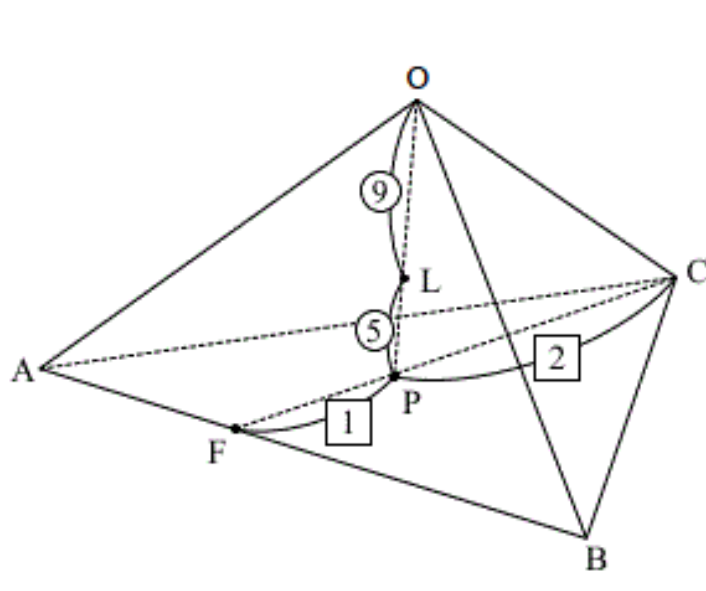
$$=\frac{2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$=\frac{2\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

と表せる。ただし、線分ABを1:2に内分する点をFとした。これより、

$$\overrightarrow{FP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FC}$$

となる。よって、下図のように考えて、



$$(\text{四面体OLABの体積})=\frac{9}{14}(\text{四面体OPABの体積})$$

$$=\frac{9}{14}\cdot\frac{1}{3}\cdot V$$

$$=\frac{27}{7}$$

となる。