

【解答】

(1)	(i)	ア	イ	ウ	エ
		1	0	－	2
	(ii)	オ	カ	キ	ク
		5	4	6	3
	(iii)	ケ	コ	サ	シ
		3	4	2	3

(2)	(i)	ス	セ	ソ		
		9	2	5		
	(ii)	タ	チ	ツ	テ	ト
		4	7	1	2	5
	(iii)	ナ	ニ	ヌ	ネ	
		1	5	2	3	

【解説】

(1)(i)

$a=3$ のとき、問題文の条件から

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 12x + 25 \\ &= (x-6)^2 - 11 \end{aligned}$$

となり、 $3 \leq x \leq 5$ における $f(x)$ の最小値が m 、最大値が M となる。よって

$$m = f(5) = -10$$

$$M = f(3) = -2$$

となる。

(ii)

問題文の条件から

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4ax + 6a^2 - 6a - 11 \\ &= (x-2a)^2 + 2a^2 - 6a - 11 \end{aligned}$$

となる。ここで、 a は正の定数であるから常に $a < 2a$ である。

[a] $2a \leq a+2$ 、つまり $a \leq 2$ のとき

$a < 2a \leq a+2$ であるから、

$$\begin{aligned} m &= f(2a) \\ &= 2a^2 - 6a - 11 \end{aligned}$$

となる。よって、 $m=0$ となるのは

$$2a^2 - 6a - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{31}}{2}$$

のときであるが、いずれも $0 < a \leq 2$ を満たさず不適である。

[b] $a+2 < 2a$ 、つまり $2 < a$ のとき

$a+2 < 2a$ であるから、

$$\begin{aligned} m &= f(a+2) \\ &= 3a^2 - 10a - 7 \end{aligned}$$

となる。よって、 $m=0$ となるのは

$$3a^2 - 10a - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5 + \sqrt{46}}{3} (\because 2 < a)$$

のときである。

以上、[a]、[b]より、 $m=0$ となるのは $a = \frac{5 + \sqrt{46}}{3}$ のときである。

(iii)

(ii)と同様に、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4ax + 6a^2 - 6a - 11 \\ &= (x-2a)^2 + 2a^2 - 6a - 11 \end{aligned}$$

である。

[a] $2a \leq a+1$ 、つまり $a \leq 1$ のとき

$2a \leq a+1$ であるから、 $f(a) \leq f(a+2)$ である。よって

$$\begin{aligned} M &= f(a+2) \\ &= 3a^2 - 10a - 7 \end{aligned}$$

となる。よって、 $M=0$ となるのは

$$3a^2 - 10a - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{46}}{3}$$

のときであるが、いずれも $0 < a \leq 1$ を満たさず不適である。

[b] $a+1 < 2a$ 、つまり $1 < a$ のとき

$a+1 < 2a$ であるから、 $f(a+2) < f(a)$ である。よって

$$\begin{aligned} M &= f(a) \\ &= 3a^2 - 6a - 11 \end{aligned}$$

となる。よって、 $M=0$ となるのは

$$3a^2 - 6a - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3 + \sqrt{42}}{3} (\because 1 < a)$$

のときである。

以上、[a]、[b]より、 $M=0$ となるのは $a = \frac{3 + \sqrt{42}}{3}$ のときである。

(2)(i)

1回の操作後、2つの箱の中が最初と同じ状態であるのは、Aからは赤球を、Bからは白球を

取り出したときであるから、求める確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

となる。

(ii)

問題文の規則から、Aの中の白球の個数が増えるのはAから白球を取り出したときだけで

ある。よって2回の操作後、Aの中の白球が2個であるのは、Bからどの球を取り出すか

に関係なく、Aから赤球を2回取り出した場合である。1回目の操作でBから赤球を取り出す

か白球を取り出すかによって1回目の操作後のAの中の球の総数が異なることに注意して、

求める確率は

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{47}{125}$$

となる。

(iii)

2回の操作後、Aの中の白球が0個であるのは、Bからどの球を取り出すかに関係なく、A

から白球を2回取り出した場合である。よって、1回目の操作でBから赤球を取り出すか

白球を取り出すかによって1回目の操作後のAの中の球の総数が異なることに注意してこの確

率を求めると

$$\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{23}{250}$$

となる。また、1回目の操作でBから白球を取り出し、かつ2回の操作後、Aの中の白球が0

個である確率は

$$\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{50}$$

となる。よって求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{50}}{\frac{23}{250}} = \frac{15}{23}$$

となる。

【解答】

	ア	イ				
	2	2				
(1)	ウ	エ	オ	カ		
	0	3	2	6		
(2)	キ	ク	ケ			
	2	2	2			
(3)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
	7	6	8	9	2	6

【解説】

問題文の条件から、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x - 2 \int_0^x (x-t) \cos t \, dt \\
 &= x - 2x \int_0^x \cos t \, dt + 2 \int_0^x t \cos t \, dt \\
 &= x - 2x [\sin t]_0^x + 2 [t \sin t]_0^x - 2 \int_0^x \sin t \, dt \\
 &= x - 2x [\sin t]_0^x + 2 [t \sin t + \cos t]_0^x \\
 &= 2 \cos x + x - 2
 \end{aligned}$$

となる。

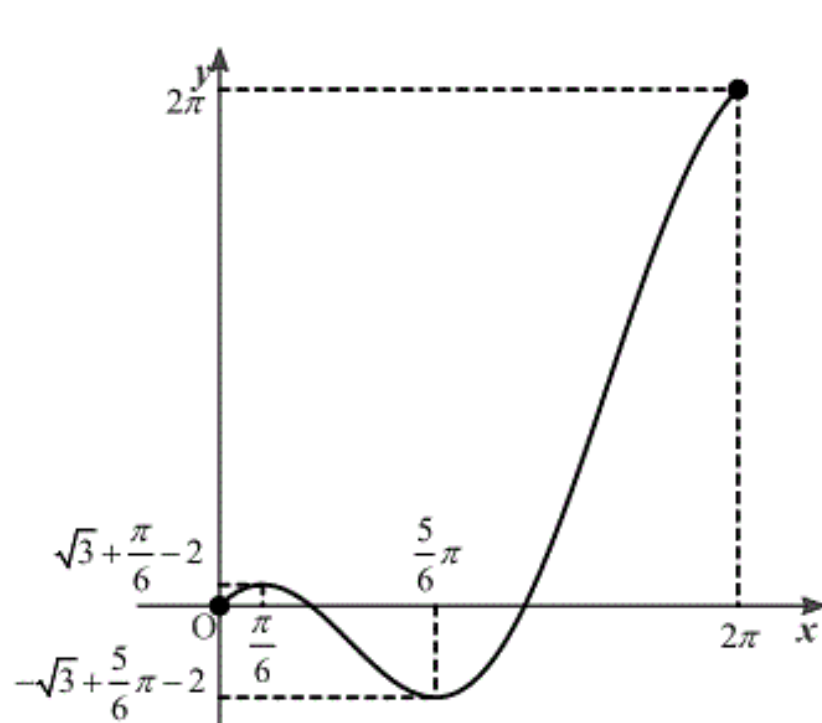
(1)

 $f(x) = 2 \cos x + x - 2$ より $f'(x) = -2 \sin x + 1$ であるから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ での $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$	$\nearrow$	+	0	-	0	+	$\nearrow$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	2π

ここで、

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} - 2 < 2\pi \\
 f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= -\sqrt{3} + \frac{5}{6}\pi - 2 < 0
 \end{aligned}$$

 となるから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。

 ここで、方程式 $f(x) = k$ の実数解の個数は曲線 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の交点の個数

 に等しいから、求める定数 k の値の範囲は $0 \leq k < \sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{6}$ となる。

(2)

 $f'(x) = -2 \sin x + 1$ より $f''(x) = -2 \cos x$ であるから、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で

$$-2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

 となり、変曲点 P の座標は $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 2\right)$ となる。よって $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ より、 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned}
 y - \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) &= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 \Leftrightarrow y &= -x + \pi - 2
 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x) + f(\pi - x)}{2} &= \frac{2 \cos x + x - 2 + 2 \cos(\pi - x) + \pi - x - 2}{2} \\
 &= \frac{2 \cos x - 2 \cos x + \pi - 4}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2} - 2
 \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{6}}^a \{f(x) - g(x)\} \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^a (2 \cos x + 2x - \pi) \, dx \\
 &= \left[2 \sin x + x^2 - \pi x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^a \\
 &= 2 \sin a + a^2 - \pi a + 1 - \frac{7}{36} \pi^2
 \end{aligned}$$

 である。ここで、 $h(a) = 2 \sin a + a^2 - \pi a + 1 - \frac{7}{36} \pi^2$ とおくと、

$$h'(a) = 2 \cos a + 2a - \pi$$

$$h''(a) = -2 \sin a + 2 \geq 0$$

 であるから $a > -\frac{\pi}{6}$ において $h'(a)$ は単調増加する。このことと $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ であることから、

 $a > -\frac{\pi}{6}$ における $h(a)$ の増減は以下のようになる。

a	$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	...	$\frac{\pi}{2}$	...
$h'(a)$	$\nearrow$	-	0	+
$h(a)$	$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$

また、

$$\begin{aligned}
 h\left(-\frac{\pi}{6}\right) &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \{f(x) - g(x)\} \, dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{7}{6}\pi\right) &= -1 + \frac{49}{36} \pi^2 - \frac{7}{6} \pi^2 + 1 - \frac{7}{36} \pi^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

 となるから、方程式 $h(a) = 0$ は $a > -\frac{\pi}{6}$ においてただ1つの実数解 $a = \frac{7}{6}\pi$ をもつ。よって求

 める a の値は $\frac{7}{6}\pi$ である。また、 $h'(x) = f(x) - g(x)$ であるから、上で示した増減より

 $-\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2}$ で $f(x) - g(x) < 0$ 、 $\frac{\pi}{2} \leq a < \frac{7}{6}\pi$ で $f(x) - g(x) \geq 0$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} \{f(x) - g(x)\} \, dx &= 0 \\
 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \{g(x) - f(x)\} \, dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7}{6}\pi} \{f(x) - g(x)\} \, dx
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} |f(x) - g(x)| \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \{g(x) - f(x)\} \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7}{6}\pi} \{f(x) - g(x)\} \, dx \\
 &= -2h\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -2 \cdot \left(2 + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2} + 1 - \frac{7}{36} \pi^2\right) \\
 &= \frac{8}{9} \pi^2 - 6
 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	1	4	4	4	7	8	5	1	5	4	5	5	2	1	5	5
(2)	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ									
	2	2	4	4	2	1	3									

【解説】

(1) 平面 α は直線 AB に垂直であり、点 B, P は平面 α 上にあるから $\triangle ABP$ は $\angle ABP$ が直角の直角三角形である。よって、 $|\overline{AB}| = |\overline{AP}| \cos \angle PAB$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AP} &= |\overline{AB}| |\overline{AP}| \cos \angle PAB \\ &= |\overline{AB}|^2\end{aligned}$$

である。また、問題文の条件より $\overline{AB} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ であるから、

$$|\overline{AB}| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

である。よって

$$\overline{AB} \cdot \overline{AP} = \frac{1}{4}$$

となる。 $P(x, y, z)$ としたとき $\overline{AP} = (x, y, z-1)$ であるから、

$$\overline{AB} \cdot \overline{AP} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AP} &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 2x + 4y + 4z &= 7\end{aligned}$$

となる。点 H は直線 ℓ 上にあるから、その座標は実数 X を用いて $\left(X, -\frac{X}{2} + \frac{7}{4}, 0\right)$ と表せる。

ここで、直線 ℓ の方向ベクトルの 1 つは $(2, -1, 0)$ であり、BH は点 B から直線 ℓ に下ろした垂線であるから、

$$\begin{aligned}\overline{BH} \cdot (2, -1, 0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{6}, -\frac{X}{2} + \frac{17}{12}, -\frac{4}{3}\right) \cdot (2, -1, 0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2X - \frac{1}{3} + \frac{X}{2} - \frac{17}{12} &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= \frac{7}{10}\end{aligned}$$

となる。よって $H\left(\frac{7}{10}, \frac{7}{5}, 0\right)$ である。また、点 B から xy 平面に下ろした垂線の足が点 K であ

るから、 $K\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0\right)$ である。これらのことから、 $\overline{KH} = \left(\frac{8}{15}, \frac{16}{15}, 0\right)$ 、 $\overline{BH} = \left(\frac{8}{15}, \frac{16}{15}, -\frac{4}{3}\right)$ であり、

$$\begin{aligned}|\overline{KH}| &= \frac{8}{15}\sqrt{1+4} \\ &= \frac{8\sqrt{5}}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overline{BH}| &= \frac{4}{15}\sqrt{4+16+25} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

となる。球面 S の半径が 1 であることと、 $|\overline{AB}| = \frac{1}{2}$ であることから円 C の半径は

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。3 点 B, Q, H は平面 α 上にあり、点 Q は円 C の円周上にあるから、常に

$$|\overline{BH}| = \frac{4\sqrt{5}}{5}, |\overline{BQ}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ である。よって、 } \overline{BH} \cdot \overline{BQ} \text{ が最大となるのは } \overline{BH} \text{ と } \overline{BQ} \text{ のなす角が } 0 \text{ の}$$

ときで、最大値は

$$\begin{aligned}\overline{BH} \cdot \overline{BQ} &= |\overline{BH}| |\overline{BQ}| \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{5}\end{aligned}$$

となる。

(2)

問題文の条件より $\overline{DR} = (X, Y-2, -4)$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{DT} &= t\overline{DR} \\ \Leftrightarrow \overline{OT} &= t\overline{DR} + \overline{OD} \\ \Leftrightarrow \overline{OT} &= (tX, (Y-2)t+2, -4t+4)\end{aligned}$$

である。点 T が直線 DR と球面 S の接点であるとする、 $\overline{AT}$ と $\overline{DR}$ は直交するから、

$$\begin{aligned}\overline{AT} \cdot \overline{DR} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{OT} - \overline{OA}) \cdot \overline{DR} &= 0 \\ \Leftrightarrow (tX, (Y-2)t+2, -4t+3) \cdot (X, Y-2, -4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{X^2 + (Y-2)^2 + 16\right\}t &= 2(8-Y) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2(8-Y)}{X^2 + (Y-2)^2 + 16} \left(\because X^2 + (Y-2)^2 + 16 > 0\right) \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、 $|\overline{AT}| = 1$ であるから

$$\begin{aligned}(tX)^2 + \{(Y-2)t+2\}^2 + \{-4t+3\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left\{X^2 + (Y-2)^2 + 16\right\}t^2 + 4(Y-8)t + 12 &= 0\end{aligned}$$

である。この式に①を代入して

$$\begin{aligned}\frac{(16-2Y)^2}{X^2 + (Y-2)^2 + 16} + \frac{4(Y-8)(16-2Y)}{X^2 + (Y-2)^2 + 16} + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (16-2Y)(16-2Y+4Y-32) + 12\left\{X^2 + (Y-2)^2 + 16\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{X^2}{2} + \frac{(Y+1)^2}{3} &= 1\end{aligned}$$

となるから、点 R は楕円 $\frac{x^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1, z=0$ 上を動く。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	5	1	2	3	1	2	3	5	2	1	3	5
(2)	ス	セ	ソ	タ								
	0	1	1	5								

【解説】

(1)

 $w = \frac{iz - (1+i)}{2z-5}$ を z について解くと

$$w = \frac{iz - (1+i)}{2z-5}$$

$$\Leftrightarrow (2z-5)w = iz - (1+i) \left(\because z \neq \frac{5}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (2w-i)z = 5w-1-i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{5w-1-i}{2w-i} \left(\because w \neq \frac{1}{2}i \right)$$

である。これを $|z-1|=1$ に代入して、

$$\left| \frac{5w-1-i}{2w-i} - 1 \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |3w-1| = |2w-i|$$

となる。この式の両辺は 0 以上であるから両辺を 2 乗すると

$$|3w-1|^2 = |2w-i|^2$$

$$\Leftrightarrow 9|w|^2 - 3w - 3\bar{w} + 1 = 4|w|^2 + 2wi - 2\bar{w}i + 1$$

$$\Leftrightarrow 5|w|^2 - (3+2i)w - (3-2i)\bar{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 - \left(\frac{3-2i}{5} \right)w - \left(\frac{3-2i}{5} \right)\bar{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| w - \frac{3-2i}{5} \right|^2 = \left| \frac{3-2i}{5} \right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left| w - \frac{3-2i}{5} \right| = \frac{\sqrt{13}}{5}$$

となる。よって、点 $Q(w)$ は点 $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}i$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{13}}{5}$ の円上を動く。

(2)

円 C_1 と C_2 の交点を α とすると、 α は円 C_1 上にあるから、 θ (ただし $0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて

$\alpha = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ と表すことができる。また、 α は円 C_2 上にあるから

$$\left| \alpha - \frac{3-2i}{5} \right| = \frac{\sqrt{13}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2}{5} + \cos\theta + \left(\frac{2}{5} + \sin\theta \right)i \right| = \frac{\sqrt{13}}{5}$$

となる。両辺正より 2 乗して

$$\left| \frac{2}{5} + \cos\theta + \left(\frac{2}{5} + \sin\theta \right)i \right|^2 = \frac{13}{25}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} + \cos\theta \right)^2 + \left(\frac{2}{5} + \sin\theta \right)^2 = \frac{13}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta + \cos\theta = -1$$

となる。また、 $\sin\theta + \cos\theta = -1$ の両辺を 2 乗すると

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta \cos\theta = 0$$

であるから、

$$(\sin\theta, \cos\theta) = (0, -1), (-1, 0)$$

となる。よって $(\sin\theta, \cos\theta) = (0, -1)$ のとき $\alpha = 1 - i$ となり、 $(\sin\theta, \cos\theta) = (-1, 0)$ のとき

$\alpha = 0$ となる。 β の実部は γ の実部より小さいから、 $\beta = 0, \gamma = 1 - i$ である。また、点 A の座

標は 1 であるから、 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ である。ここで、点 $R_1(u)$ は円 C_1 上かつ、直線 BC に対して点

A と同じ側にあるから、円周角の定理より $\angle BR_1C = \frac{\pi}{4}$ である。よって、

$$\arg\left(\frac{u-\gamma}{u-\beta}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$= \arg(1+i)$$

となる。また、点 $R_2(v)$ は円 C_2 上かつ、直線 BC に対して点 A と同じ側にあるから、円 C_2 の

中心を $D\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}i\right)$ とおくと、円周角の定理より $\angle BR_2C = \frac{1}{2}\angle BDC$ である。よって、

$$\arg\left(\frac{v-\gamma}{v-\beta}\right) = \frac{1}{2}\arg\left(\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}i - 1 + i}{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\arg\left(\frac{-12+5i}{13}\right)$$

となる。ここで $\arg\left(\frac{-12+5i}{13}\right) = 2\theta$ (ただし $0 \leq \theta < \pi$) とおくと、 $\cos 2\theta = -\frac{12}{13}$ であるから、

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{26}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$= \frac{25}{26}$$

となる。また、 $\cos 2\theta < 0, \sin 2\theta = \frac{5}{13} > 0$ であるから、 $\frac{1}{2}\pi < 2\theta < \pi$ 、つまり $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ であ

る。よって、 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{26}}, \sin\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$ となる。このことから、

$$\frac{1}{2}\arg\left(\frac{-12+5i}{13}\right) = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{5}{\sqrt{26}}i\right)$$

$$= \arg(1+5i)$$

となる。よって、

$$\arg\left(\frac{v-\gamma}{v-\beta}\right) = \arg(1+5i)$$

となる。