

I

【解答】

(1)	(i)	ア	イ	ウ	エ			
		5	5	5	2			
	(ii)	オ	カ	キ	ク			
		1	5	1	6			
(2)		ケ	コ	サ	シ	ス	セ	
		5	9	1	4	2	7	

【解説】

(1)(i)

k を実数として $x+2y=k$ とおく。 $x+2y=k \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ は傾き $-\frac{1}{2}$ 、 y 切片 $\frac{k}{2}$ の直線を表すから、この直線と円 $x^2+y^2=1$ が共有点を持つような k の最大値を求めればよい。 k が

最大となるとき、すなわち y 切片が最大となるとき、 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ と $x^2+y^2=1$ は接するから、

$$\begin{aligned}x^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}\right)^2&=1 \\ \Leftrightarrow 5x^2-2kx+k^2-4&=0\end{aligned}$$

の判別式を D とすると、 $\frac{D}{4}=0$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=0 \\ \Leftrightarrow k^2-5(k^2-4)&=0 \\ \Leftrightarrow k^2&=5 \\ \therefore k&=\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

となるから $x+2y$ の最大値は $\sqrt{5}$ である。また、このときの x の値は

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-k)}{5} \\ &=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

であり、 y の値は

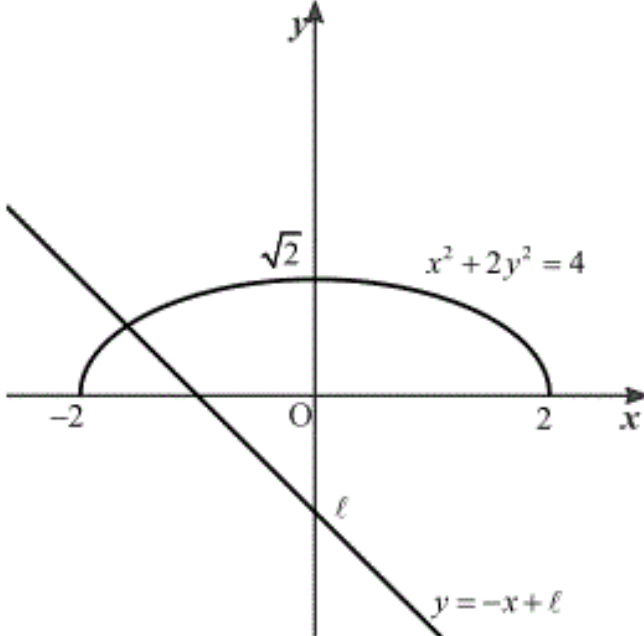
$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

である。

(ii)

ℓ を実数として $x+y=\ell$ とおく。 $x+y=\ell \Leftrightarrow y=-x+\ell$ は傾き -1 、 y 切片 ℓ の直線を表すから、この直線と楕円 $x^2+2y^2=4$ の $y\geq 0$ の部分が共有点を持つような ℓ の範囲を考える。

$y=-x+\ell$ と $x^2+2y^2=4$ の $y\geq 0$ の部分を図示すると、下図のようになる。



上図より、 ℓ は $(x,y)=(-2,0)$ のとき最小値 -2 をとり、 $x^2+2y^2=4$ ($y\geq 0$) と接するとき最大値をとるから、

$$\begin{aligned}x^2+2(-x+\ell)^2&=4 \\ \Leftrightarrow 3x^2-4\ell x+2\ell^2-4&=0\end{aligned}$$

の判別式を D' とすると、 $\frac{D'}{4}=0$ となる。よって、 ℓ の最大値は

$$\begin{aligned}\frac{D'}{4}&=0 \\ \Leftrightarrow 4\ell^2-3(2\ell^2-4)&=0 \\ \Leftrightarrow \ell^2&=6 \\ \therefore \ell&=\sqrt{6}(\because \ell>0)\end{aligned}$$

と求まる。したがって、 ℓ のとりうる値の範囲は $-2\leq \ell\leq \sqrt{6}$ である。ここで、題意より

$(x+y)^2-2a(x+y-1)$ の最小値が -4 であるから、 $-2\leq \ell\leq \sqrt{6}$ における

$$\ell^2-2a(\ell-1)=(\ell-a)^2-a^2+2a$$

の最小値が -4 となる a の値を求めればよい。よって、 a の値によって場合分けして考える。

[1] $a<-2$ のとき

$(\ell-a)^2-a^2+2a$ は $\ell=-2$ で最小値 $6a+4$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned}6a+4&=-4 \\ \therefore a&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

となるが、これは $a<-2$ を満たさず不適である。

[2] $-2\leq a\leq \sqrt{6}$ のとき

$(\ell-a)^2-a^2+2a$ は $\ell=a$ で最小値 $-a^2+2a$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned}-a^2+2a&=-4 \\ \therefore a&=1\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。このうち $-2\leq a\leq \sqrt{6}$ を満たすのは $a=1-\sqrt{5}$ である。

[3] $a>\sqrt{6}$ のとき

$(\ell-a)^2-a^2+2a$ は $\ell=\sqrt{6}$ で最小値 $-2(\sqrt{6}-1)a+6$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned}-2(\sqrt{6}-1)a+6&=-4 \\ \therefore a&=\sqrt{6}+1\end{aligned}$$

となり、 $a=\sqrt{6}+1$ は $a>\sqrt{6}$ を満たす。

以上、[1]~[3]より求める a の値は $a=1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{6}$ である。

(2)

さいころの目の出方は6通り存在し、これらは同様に確からしい。まず、目の出方の総数は $6^3=216$ (通り)ある。このうちちょうど3種類の目が出るのは、2回目の試行で1回目の試行で出なかった目、3回目の試行で1,2回目の試行で出なかった目が出る場合であるのでその

場合の数は $6\cdot 5\cdot 4=120$ (通り)である。よって、ちょうど3種類の目が出る確率は $\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$ で

ある。また、 $m\leq 2$ かつ、ちょうど2種類の目が出る場合の出た目の組は

$$(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)$$

の9通りあり、それぞれの組においてどちらの目が2回出るか、何回目の試行で出るのかを考える。 $2\cdot {}_3C_1=6$ 通りの出方があるから、 $m\leq 2$ かつ、ちょうど2種類の目が出る確率は

$\frac{9\times 6}{216}=\frac{1}{4}$ である。さらに、 $m\leq 2$ かつ $4\leq M$ である事象を A 、出た目がちょうど2種類であ

る事象を B とすると、求める条件付き確率は $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ である。まず、 $A\cap B$ となる

場合について考える。このとき、出た目の組は

$$(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6)$$

の6通りであり、先ほどと同様に考えて、 $m\leq 2$ かつ $4\leq M$ かつちょうど2種類の目が出る

確率は $P(A\cap B)=\frac{6\times 6}{216}=\frac{1}{6}$ である。次に、 A の場合について考える。出た目の種類が1種類

の場合は存在せず、2種類の場合は上記のように36通りである。3種類の場合を考えると、考えられる (m,M) の組は

$$(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6)$$

の6通りあり、それぞれの組について (m,M) 以外の目の出方は $m+1, m+2, \dots, M-1$ の

$M-m-1$ (通り)あるから、何回目の試行で出るのかを考慮すると、3種類の場合は

$(2+3+4+1+2+3)\cdot 3!=90$ (通り)ある。よって、 $m\leq 2$ かつ $4\leq M$ となる確率 $P(A)$ は

$P(A)=\frac{36+90}{216}=\frac{7}{12}$ である。したがって、求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}}=\frac{2}{7}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	4	3	－	3	2
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	0	－	6	3	4
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ
	9	3	4	2	1

【解説】

(1)

 $a = \frac{4}{3}$ のとき、(*)は

$$x^3 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{16}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)(x^2 + 3x + 4) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と因数分解でき、 $x^2 + 3x + 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ より $x^2 + 3x + 4 = 0$ は実数解を持たないため、

(*)の実数解は $x = \frac{4}{3}$ である。また、(*)の虚数解を α, β ($\alpha \neq \beta$) とすると、 $\textcircled{1}$ より α, β は

$x^2 + 3x + 4 = 0$ の異なる2つの解であるため、解と係数の関係より $\alpha\beta = 4$ が成り立つ。したがって、 $\alpha^2 + 3\alpha + 4 = \beta^2 + 3\beta + 4 = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + 4\alpha + 4)(\beta^2 - 5\beta + 4) &= \alpha(-8\beta) \\ &= -8\alpha\beta \\ &= -32 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

方程式(*)は実数係数の方程式であるから、実数解1つと互いに共役な虚数解2つ、あるいは実数解を3つ持つ。よって、方程式(*)が異なる2つの実数解を持つとき、方程式(*)は重解を持つから、方程式(*)の異なる実数解を p, q ($p \neq q$) とし、重解を p としても一般性を失わない。このとき、解と係数の関係より

$$\begin{cases} q + 2p = a - 3 & \cdots \textcircled{2} \\ p(2q + p) = 0 & \cdots \textcircled{3} \\ p^2q = 3a^2 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\textcircled{3}$ より $p = 0$ または $2q + p = 0$ であるから、場合分けをして考える。

[1] $p = 0$ のとき

$\textcircled{4}$ より $a = 0$ となるから、 $\textcircled{2}$ より $q = -3$ となり、これは題意を満たす。

[2] $2q + p = 0$ 、すなわち $q = -\frac{1}{2}p$ のとき

$\textcircled{2}$ より

$$\frac{3}{2}p = a - 3$$

$$\therefore p = \frac{2}{3}(a - 3)$$

であり、 $q = -\frac{1}{3}(a - 3)$ であるから、これらを $\textcircled{4}$ に代入すると

$$-\frac{4}{27}(a - 3)^3 = 3a^2$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)^3 = -\frac{81}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 + \frac{45}{4}a^2 + 27a - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 6)^2 \left(a - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\therefore a = -6, \frac{3}{4}$$

となる。このとき、 $(a, p, q) = (-6, -6, 3), \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ となり、題意を満たす。

以上[1], [2]より求める a の値は $a = 0, -6, \frac{3}{4}$ である。

(3)

与式は

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \end{aligned}$$

と変形できるから、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= \left(\sqrt{3}\right)^5 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right)^5 \\ &= 9\sqrt{3} \left(\cos \frac{25}{6}\pi + i \sin \frac{25}{6}\pi\right) \\ &= 9\sqrt{3} \left(\cos \frac{1}{6}\pi + i \sin \frac{1}{6}\pi\right) \\ &= 9\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{9(3 + \sqrt{3}i)}{2} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $\textcircled{1}$ より、 $\gamma^n + 3$ が方程式(*)の解となるような実数 a が存在するのは $\gamma^n + 3$ が実数または $\gamma^n + 3$ が $x^2 + 3x + 3a = 0$ の解のときである。

[1] $\gamma^n + 3$ が実数のとき

$$\gamma = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \text{ より 最小の } n \text{ は } 6 \text{ である。}$$

[2] $\gamma^n + 3$ が $x^2 + 3x + 3a = 0$ の解のとき

$\gamma^n + 3$ の共役な複素数も解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (\gamma^n + 3) + (\bar{\gamma}^n + 3) = -3 \\ (\gamma^n + 3)(\bar{\gamma}^n + 3) = 3a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^n + \bar{\gamma}^n = -9 \\ \gamma^n \bar{\gamma}^n + 3(\gamma^n + \bar{\gamma}^n) + 9 = 3a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^n + \bar{\gamma}^n = -9 \\ |\gamma^n|^2 - 18 = 3a \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $\frac{1}{2}(\gamma^n + \bar{\gamma}^n) = -\frac{9}{2}$ 、つまり $(\sqrt{3})^n \cos \frac{5}{6}n\pi = -\frac{9}{2}$ を満たす n を考える。

$n = 1$ のとき $\cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{9}{2\sqrt{3}}$ となり不適である。 $n = 2$ のとき $\cos \frac{5}{3}\pi = -\frac{3}{2}$ となり不適であ

る。 $n = 3$ のとき $\cos \frac{5}{2}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となり不適である。 $n = 4$ のとき $\cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ となり成立す

る。

以上[1], [2]より求める最小の自然数は $n = 4$ であり、そのときの a の値は $a = 21$ である。

【解答】

(1)	ア	イ				
	1	6				
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	2	1	6	4	3	5
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス	
	6	4	9	5	6	

【解説】

(1)

$1 \leq k < 4$ のとき $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = 1$, $4 \leq k < 9$ のとき $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = 2$, $k = 9$ のとき $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = 3$ となる。よって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= 1+1+1+2+2+2+2+2+3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

である。

(2)

$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$ となる自然数 k は $m \leq \sqrt{k} < m+1$, すなわち $m^2 \leq k < (m+1)^2$ を満たす。よって, そ

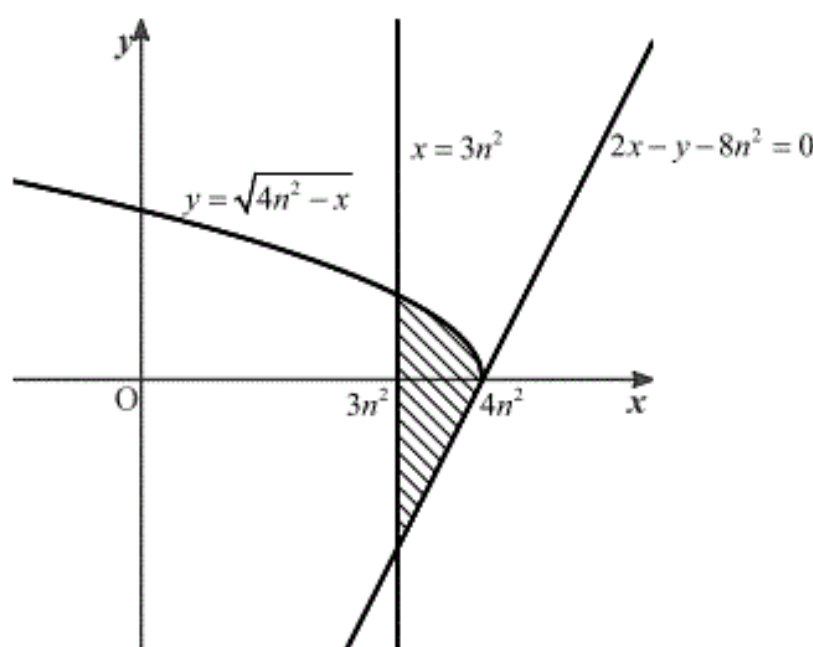
の個数は $(m+1)^2 - m^2 = (2m+1)$ 個と求まる。これを用いると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{m=1}^{n-1} m(2m+1) + n \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} (2m^2 + m) + n \\ &= \frac{2}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + n \\ &= \frac{n}{6} \{ 2(n-1)(2n-1) + 3(n-1) + 6 \} \\ &= \frac{n}{6} (4n^2 - 3n + 5) \end{aligned}$$

となる。

(3)

領域 D を図示すると, 下図の斜線部分のようになる。(ただし, 境界を含む)



上図より, 求める格子点の個数は

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{\ell=3n^2}^{4n^2} \left(\left\lfloor \sqrt{4n^2 - \ell} \right\rfloor - \left\lfloor 2\ell - 8n^2 \right\rfloor + 1 \right) \\ &= \sum_{\ell=3n^2}^{4n^2} \left(\left\lfloor \sqrt{4n^2 - \ell} \right\rfloor - 2\ell + 8n^2 + 1 \right) \\ &= \sum_{\ell=3n^2}^{4n^2} \left\lfloor \sqrt{4n^2 - \ell} \right\rfloor + \sum_{\ell=3n^2}^{4n^2} (-2\ell + 8n^2 + 1) \end{aligned}$$

と表せる。ここで, (2)より, $\sum_{\ell=3n^2}^{4n^2} \left\lfloor \sqrt{4n^2 - \ell} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \frac{n}{6} (4n^2 - 3n + 5)$ であり,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=3n^2}^{4n^2} (-2\ell + 8n^2 + 1) &= -2 \cdot \frac{1}{2} (3n^2 + 4n^2) (n^2 + 1) + (8n^2 + 1) (4n^2 - 3n^2 + 1) \\ &= - (3n^2 + 4n^2) (n^2 + 1) + (8n^2 + 1) (n^2 + 1) \\ &= n^4 + 2n^2 + 1 \end{aligned}$$

であるから, $S(n)$ は

$$\begin{aligned} S(n) &= n^4 + 2n^2 + 1 + \frac{n}{6} (4n^2 - 3n + 5) \\ &= \frac{1}{6} (6n^4 + 4n^3 + 9n^2 + 5n + 6) \end{aligned}$$

と求まる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	3	4	2	3	4	2	7	1	0
(2)	コ	サ	シ	ス	セ				
	3	2	3	1	6				
(3)	ソ	タ	チ	ツ	テ				
	2	4	3	2	8				

【解説】

(1)

$f(x) = x - 1 + \sqrt{-x^2 + 6x + 23}$ より、 $-x^2 + 6x + 23 \geq 0$ である。よって、 $f(x)$ の定義域は

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x + 23 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x - 23 &\leq 0 \\ \therefore 3 - 4\sqrt{2} &\leq x \leq 3 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{-2x + 6}{2\sqrt{-x^2 + 6x + 23}} \\ &= 1 + \frac{-x + 3}{\sqrt{-x^2 + 6x + 23}} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{-x + 3}{\sqrt{-x^2 + 6x + 23}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 6x + 23} &= x - 3 \quad (x \geq 3) \\ \Leftrightarrow -x^2 + 6x + 23 &= x^2 - 6x + 9 \quad (x \geq 3) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 12x - 14 &= 0 \quad (x \geq 3) \\ \Leftrightarrow (x - 7)(x + 1) &= 0 \quad (x \geq 3) \\ \therefore x &= 7 \quad (\because x \geq 3) \end{aligned}$$

であり、 $7 < 3 + 4\sqrt{2}$ より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$3 - 4\sqrt{2}$	$\cdots$	7	$\cdots$	$3 + 4\sqrt{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	(極大)	$\searrow$	

増減表より、 $f(x)$ は $x = 7$ のとき極大値

$$\begin{aligned} f(7) &= 7 - 1 + \sqrt{-49 + 42 + 23} \\ &= 6 + \sqrt{16} \\ &= 10 \end{aligned}$$

をとる。

(2)

与式を変形すると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - (x - 1)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left(x - 1 + \sqrt{-x^2 + 6x + 23} \right) - (x - 1) \right\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{-x^2 + 6x + 23} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{32 - (x - 3)^2} dx \end{aligned}$$

となり、 α, β は $\sqrt{-x^2 + 6x + 23} = 0$ の解であるから、 $\alpha = 3 - 4\sqrt{2}, \beta = 3 + 4\sqrt{2}$ である。ここ

$x - 3 = 4\sqrt{2} \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると $dx = -4\sqrt{2} \sin \theta$ であり、 x と θ の対応表は以下のようになる。

x	$3 - 4\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$3 + 4\sqrt{2}$
θ	π	$\rightarrow$	0

よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{32 - (x - 3)^2} dx \\ &= \int_{\pi}^0 \sqrt{32(1 - \cos^2 \theta)} \cdot (-4\sqrt{2} \sin \theta) d\theta \\ &= 32 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \quad (\because \sin \theta \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi)) \\ &= 32 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 16 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

となる。

(3)

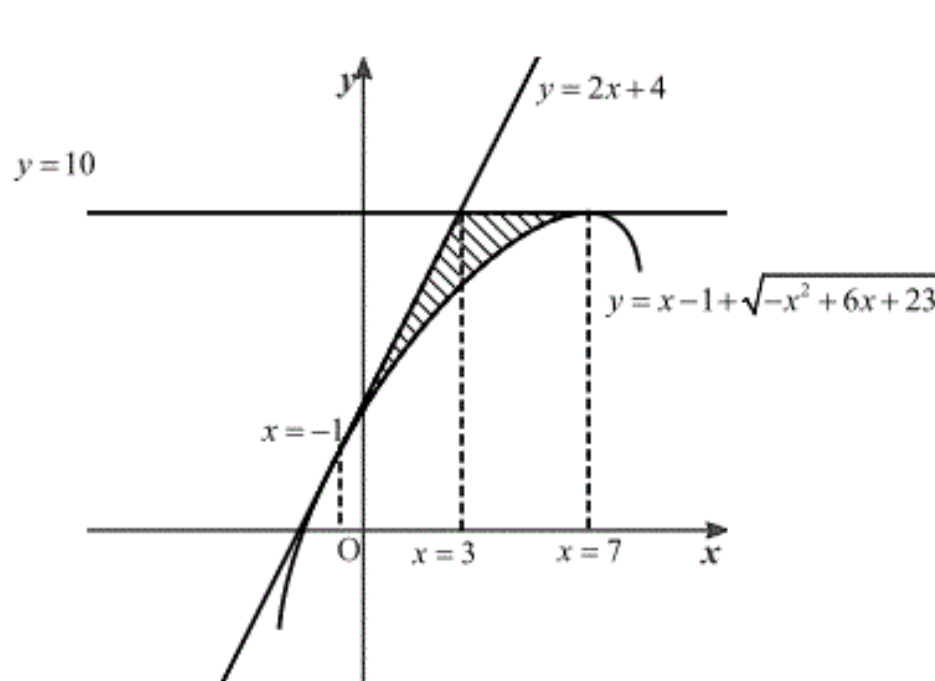
ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(-1) &= f'(-1)(x + 1) \\ \Leftrightarrow y &= 2(x + 1) + 2 \\ \therefore y &= 2x + 4 \end{aligned}$$

である。また、 ℓ は点 $(-1, f(-1))$ における C の接線であり、

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\sqrt{-x^2 + 6x + 23} - (-x + 3) \cdot \frac{-2x + 6}{2\sqrt{-x^2 + 6x + 23}}}{-x^2 + 6x + 23} \\ &= \frac{-(-x^2 + 6x + 23) - (-x + 3)^2}{(-x^2 + 6x + 23)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-32}{(-x^2 + 6x + 23)^{\frac{3}{2}}} \\ &< 0 \end{aligned}$$

より C は上に凸であるから、 $-1 \leq x \leq 7$ において $2x + 4 \geq f(x)$ である。 $C, \ell, y = 10$ で囲まれた図形を図示すると下図の斜線部分のようになる。



ℓ と $y = 10$ の交点は $x = 3$ であるから、求める面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \int_{-1}^3 \{2x + 4 - f(x)\} dx + \int_3^7 \{10 - f(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^3 (2x + 4) dx + \int_3^7 10 dx - \int_{-1}^7 f(x) dx \\ &= \left[x^2 + 4x \right]_{-1}^3 + [10x]_3^7 - \int_{-1}^7 \left(x - 1 + \sqrt{-x^2 + 6x + 23} \right) dx \\ &= 24 + 40 - \int_{-1}^7 (x - 1) dx - \int_{-1}^7 \sqrt{-x^2 + 6x + 23} dx \\ &= 64 - \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^7 - \int_{-1}^7 \sqrt{32 - (x - 3)^2} dx \\ &= 64 - 16 - \int_{-1}^7 \sqrt{32 - (x - 3)^2} dx \\ &= 48 - \int_{-1}^7 \sqrt{32 - (x - 3)^2} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、(2)同様に $x - 3 = 4\sqrt{2} \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると $dx = -4\sqrt{2} \sin \theta$ であり、 x と θ の対応表は以下のようになる。

x	-1	$\rightarrow$	7
θ	$\frac{3}{4}\pi$	$\rightarrow$	$\frac{1}{4}\pi$

よって、

$$\begin{aligned} T &= 48 - \int_{-1}^7 \sqrt{32 - (x - 3)^2} dx \\ &= 48 - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \sqrt{32(1 - \cos^2 \theta)} \cdot (-4\sqrt{2} \sin \theta) d\theta \\ &= 48 - 32 \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 \theta d\theta \quad \left(\because \sin \theta \geq 0 \quad \left(\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \right) \right) \\ &= 48 - 32 \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 48 - 16 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= 48 - 16 \left(\frac{1}{2}\pi + 1 \right) \\ &= 32 - 8\pi \end{aligned}$$

となる。