

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	1	6	1	0	2	0	6
(2)	ク	ケ					
	4	5					
(3)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	5	4	4	5	4	5	4

【解説】

(1)

長方形の周の長さは $2 \cdot (30 + 10) = 80$ (cm) である。点 P が x 回目に頂点 C に到達するのは D から C まで移動し、さらに長方形の周上を $(x-1)$ 周だけ回ったときであるから、その時刻は

$$\frac{30 + 80(x-1)}{5} = 16x - 10 \text{ (秒)}$$

となる。また、同様にして、点 Q が y 回目に頂点 C に到達する時刻は

$$4 + \frac{40 + 80(y-1)}{4} = 20y - 6 \text{ (秒)}$$

となる。

(2)

(1)より、

$$16a - 10 = 20b - 6$$

$$\Leftrightarrow 16a - 20b = 4$$

$$\therefore 4a - 5b = 1$$

となる。

(3)

$4a - 5b = 1$ と $4 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 1$ を辺々引くと

$$4(a-4) - 5(b-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a-4) = 5(b-3)$$

となる。ここで、4 と 5 は互いに素であるから、 $a > 0, b > 0$ より、 n を 0 以上の整数として

$a-4 = 5n, b-3 = 4n$ と表される。よって、点 P, Q が k 回目に頂点 C ですれ違うのは

$$(a, b) = (5(k-1) + 4, 4(k-1) + 3) = (5k-1, 4k-1) \quad (k=1, 2, \dots)$$

のときであり、その時刻は $16(5k-1) - 10 = 80k - 26$ (秒) である。したがって、1 回目にすれ違う時刻は $80 \cdot 1 - 26 = 54$ (秒) であり、6 回目にすれ違う時刻は $80 \cdot 6 - 26 = 454$ (秒) である。また、 k が 1 増えると a, b はそれぞれ 5, 4 だけ増えるから、点 P, Q はそれぞれ長方形 ABCD を 5 周、4 周するたびに頂点 C で互いにすれ違う。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	2	6	6	2	6	1	8	2	6	3	2	1
(2)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ			
	6	7	－	2	5	4	7	7	3			

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 \log_2 (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) &= -2n^3 + 49 + \log_2 a_n^2 \\
 \Leftrightarrow \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n &= -2n^3 + 49 + 2\log_2 a_n \\
 \Leftrightarrow \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_{n-1} - \log_2 a_n &= -2n^3 + 49 \quad \cdots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

とおき、 $\textcircled{3}$ の n を $n+1$ に置き換えた式を

$$\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n - \log_2 a_{n+1} = -2(n+1)^3 + 49 \quad \cdots \textcircled{4}$$

とおく。 $\textcircled{3} - \textcircled{4}$ より、

$$\begin{aligned}
 \log_2 a_{n+1} - 2\log_2 a_n &= 2(3n^2 + 3n + 1) \\
 \therefore b_{n+1} &= 2b_n + 6n^2 + 6n + 2
 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
 f(n+1) &= 2f(n) + 6n^2 + 6n + 2 \\
 \Leftrightarrow \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma &= 2(\alpha n^2 + \beta n + \gamma) + 6n^2 + 6n + 2 \\
 \therefore (-\alpha - 6)n^2 + (2\alpha - \beta - 6)n + \alpha + \beta - \gamma - 2 &= 0
 \end{aligned}$$

であり、これが n についての恒等式となるのは

$$\begin{aligned}
 -\alpha - 6 &= 2\alpha - \beta - 6 = \alpha + \beta - \gamma - 2 = 0 \\
 \therefore \alpha &= -6, \beta = -18, \gamma = -26
 \end{aligned}$$

のときである。さらに、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、

$$b_{n+1} - f(n+1) = 2\{b_n - f(n)\}$$

となるから、数列 $\{b_n - f(n)\}$ は初項 $b_1 - f(1)$ 、公比2の等比数列である。ここで、

$\log_2 (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) = -2n^3 + 49 + \log_2 a_n^2$ に $n=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
 \log_2 a_1 &= -2 \cdot 1^3 + 49 + \log_2 a_1^2 \\
 \Leftrightarrow \log_2 a_1 &= -2 \cdot 1^3 + 49 + 2\log_2 a_1 \\
 \Leftrightarrow \log_2 a_1 &= 47 \\
 \therefore b_1 &= 47
 \end{aligned}$$

が得られるから、

$$b_1 - f(1) = (-47) - (-6 - 18 - 26) = 3$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 b_n - f(n) &= 2^{n-1} (b_1 - f(1)) \\
 \Leftrightarrow b_n - f(n) &= 3 \cdot 2^{n-1} \\
 \Leftrightarrow b_n &= f(n) + 3 \cdot 2^{n-1} \\
 \therefore b_n &= 3 \cdot 2^{n-1} - 6n^2 - 18n - 26
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$n \leq 4$ のとき

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= 3(2^n - 2^{n-1}) - 6(2n+1) - 18 \\
 &= 3 \cdot 2^{n-1} - 12n - 24 \\
 &< 3 \cdot 2^{n-1} - 24 \\
 &\leq 3 \cdot 2^{4-1} - 24 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore b_n > b_{n+1}$$

である。また、 $n=5$ のとき $b_6 - b_5 = 3 \cdot 2^{5-1} - 12 \cdot 5 - 24 = -36$ であるから、 $b_5 > b_6$ となる。さらに、

$n=6$ のとき $b_7 - b_6 = 3 \cdot 2^{6-1} - 12 \cdot 6 - 24 = 0$ であるから、 $b_6 = b_7$ となる。ここで、 $n \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned}
 (b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n) &= 3(2^n - 2^{n-1}) - 12 \\
 &= 3 \cdot 2^{n-1} - 12 \\
 &\geq 3 \cdot 2^{4-1} - 12 \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

となるから、 $b_5 - b_4 < b_6 - b_5 < b_7 - b_6 = 0 < b_8 - b_7 < b_9 - b_8 < \cdots$ である。よって、 $n \geq 7$ のとき

$b_n < b_{n+1}$ となる。以上より、

$$b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > b_5 > b_6 = b_7 < b_8 < b_9 < \cdots$$

となるから、 b_n が最小となるのは $n=6, 7$ のときである。また、 $a_n = 2^{b_n}$ が最小となるのは b_n が

最小となるときであるから、 $b_6 = 3 \cdot 2^{6-1} - 6 \cdot 6^2 - 18 \cdot 6 - 26 = -254$ より、 a_n の最小値は $a_6 = 2^{-254}$

である。さらに、 $\log_{10} 2^{-254} = -254 \cdot 0.3010 = -76.454$ であり、 $\log_{10} 4 = 2\log_{10} 2 = 0.6020$ より、

$$\begin{aligned}
 -77 + 0.4771 &< -76.454 < -77 + 0.6020 \\
 \Leftrightarrow -77 + \log_{10} 3 &< \log_{10} 2^{-254} < -77 + \log_{10} 4
 \end{aligned}$$

となる。よって、底10は1より大きいから、

$$3 \cdot 10^{-77} < 2^{-254} < 4 \cdot 10^{-77}$$

が得られる。したがって、 2^{-254} を小数で表したとき、小数第77位に初めて0でない数3が現

れる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ									
	2	3	2	5	2									
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ									
	9	2	7	2	5									
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	
	—	5	2	5	5	2	—	5	2	5	1	5	2	

【解説】

(1)

w が実数となることは $w = \bar{w}$ となることと同値であるから、条件 $z \neq 4$ のもとで、

$$\begin{aligned}
 w &= \bar{w} \\
 \Leftrightarrow \frac{z-3i}{i(z-4)} &= \overline{\left\{ \frac{z-3i}{i(z-4)} \right\}} \\
 \Leftrightarrow \frac{z-3i}{i(z-4)} &= \frac{\bar{z}+3i}{-i(\bar{z}-4)} \\
 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}-4) + (\bar{z}+3i)(z-4) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2z\bar{z} + (-4+3i)z + (-4-3i)\bar{z} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(z-2-\frac{3}{2}i \right) \left(\bar{z}-2+\frac{3}{2}i \right) &= (-2)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow \left| z-2-\frac{3}{2}i \right|^2 &= \frac{25}{4} \\
 \therefore \left| z-2-\frac{3}{2}i \right| &= \frac{5}{2} \left(\because \left| z-2-\frac{3}{2}i \right| \geq 0 \right)
 \end{aligned}$$

が得られる。よって、点 z の描く図形は、中心が点 $2+\frac{3}{2}i$ 、半径 $\frac{5}{2}$ の円である。ただし点 4 を除く。

(2)

条件 $z \neq 4$ のもとで、

$$\begin{aligned}
 |w+1| &= 2 \\
 \Leftrightarrow |w+1|^2 &= 4 \left(\because |w+1| \geq 0 \right) \\
 \Leftrightarrow (w+1)(\bar{w}+1) - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left\{ \frac{z-3i}{i(z-4)} + 1 \right\} \left\{ \frac{\bar{z}+3i}{-i(\bar{z}-4)} + 1 \right\} - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \{ (z-3i) + i(z-4) \} \{ (\bar{z}+3i) - i(\bar{z}-4) \} - 4(z-4)(\bar{z}-4) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \{ (1+i)z - 7i \} \{ (1-i)\bar{z} + 7i \} - 4(z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -2z\bar{z} + (9+7i)z + (9-7i)\bar{z} - 15 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(z - \frac{9}{2} + \frac{7}{2}i \right) \left(\bar{z} - \frac{9}{2} - \frac{7}{2}i \right) &= -\frac{15}{2} + \left(-\frac{9}{2} \right)^2 + \left(\frac{7}{2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow \left| z - \frac{9}{2} + \frac{7}{2}i \right|^2 &= 25 \\
 \therefore \left| z - \frac{9}{2} + \frac{7}{2}i \right| &= 5 \left(\because \left| z - \frac{9}{2} + \frac{7}{2}i \right| \geq 0 \right)
 \end{aligned}$$

が得られる。よって点 z の描く図形は、中心が $\frac{9}{2} - \frac{7}{2}i$ 、半径 5 の円である。

(3)

(2)より、 C_3 は中心が点 $\frac{9}{2} - \frac{7}{2}i + \alpha$ 、半径 5 の円であるから、 C_1 と C_3 が共有点をもたないことは、

これらの円の中心間の距離 d が $d < \left| \frac{5}{2} - 5 \right| = \frac{5}{2}$ または $d > \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ を満たすことと同値である。ここで、

$$d = \left| \left(2 + \frac{3}{2}i \right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{7}{2}i + \alpha \right) \right| = \left| \alpha + \frac{5}{2} - 5i \right|$$

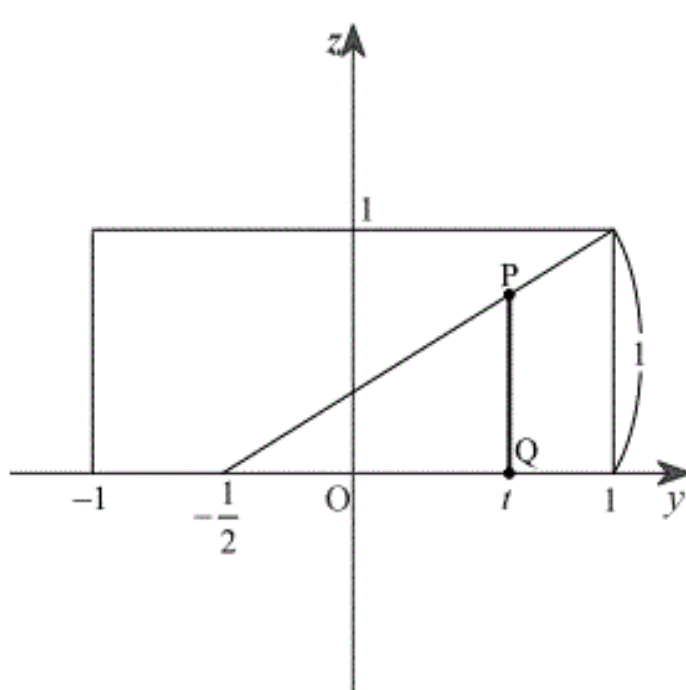
であるから、 $\left| \alpha + \frac{5}{2} - 5i \right| < \frac{5}{2}$ または $\left| \alpha + \frac{5}{2} - 5i \right| > \frac{15}{2}$ が条件となる。よって、 C_1 と C_3 が共有点をもたないのは、点 α が点 $-\frac{5}{2} + 5i$ を中心とする半径 $\frac{5}{2}$ の円の内部、または点 $-\frac{5}{2} + 5i$ を中心とする半径 $\frac{15}{2}$ の円の外部にあるときである。

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ								
	2	3	1	3								
(1)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ		
	4	3	2	3	1	2	3	4	2	9		
(2)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	
	2	3	1	6	1	3	2	3	3	4	9	

〔解説〕

円柱を x 軸方向から見ると下図のようになる。



よって、平行線と線分の比の関係から

$$\begin{aligned} \text{PQ}:1 &= \left\{ t - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} : \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} \text{PQ} &= t + \frac{1}{2} \\ \therefore \text{PQ} &= \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。

(1)

$P\left(\pm\sqrt{1-t^2}, t, \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}\right)$ であり、切断面はPQを一边に持ち、 yz 平面について対称な長方形となるから、その面積は、

$$S(t) = 2\sqrt{1-t^2} \cdot \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}\right) \\ = \left(\frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-t^2}$$

となる。また、 $t = \sin \varphi$ とおくと、 $\frac{dt}{d\varphi} = \cos \varphi$ であり、 t が $-\frac{1}{2}$ から 1 まで動くとき φ は $-\frac{\pi}{6}$ か

ら $\frac{\pi}{2}$ まで動くことに注意すれば, 立体 K の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 S(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{4}{3}t + \frac{2}{3} \right) \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{3} \sin \varphi + \frac{2}{3} \right) \cos^2 \varphi d\varphi \quad (\because \cos \varphi \geq 0) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{4}{3} (\cos \varphi)' \cos^2 \varphi + \frac{1}{3} (1 + \cos 2\varphi) \right\} d\varphi \\ &= \left[-\frac{4}{9} \cos^3 \varphi + \frac{1}{3} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{9} \pi \end{aligned}$$

となる。

(2)

円柱 C の底面は原点を中心とする半径 1 の円であるため、原点を O とすれば、 $\angle AOQ = \theta$ であり、線分 OA と x 軸の正の向きとのなす角は $-\frac{\pi}{6}$ であるから、線分 OQ と x 軸の正の向きとのなす角は $\theta - \frac{\pi}{6}$ となる。よって、2 点 P, Q に共通する y 座標は $t = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ であるから、①より、 $PQ = \frac{2}{3} \sin\left(\theta - \frac{1}{6}\pi\right) + \frac{1}{3}$ となる。また、点 Q が円 $x^2 + y^2 = 1$ ($z = 0$) の $y \geq -\frac{1}{2}$ の部分を動くとき、 θ は 0 から $\frac{4}{3}\pi$ まで動くから、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{4}{3}\pi} \left\{ \frac{2}{3} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{3} \right\} d\theta \\ &= \left[-\frac{2}{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{3} \theta \right]_0^{\frac{4}{3}\pi} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot (-\sqrt{3}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \pi \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{9} \pi \end{aligned}$$

となる。