

【解答】

(1)	ア	イ			
	2	3			
(2)	ウ	エ	オ	カ	
	2	9	1	3	
(3)	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	3	1	2	7
(4)	シ	ス	セ	ソ	タ
	3	6	1	5	1

【解説】

(1)

$m_2=1$ となるのは、2回の試行後に1つの辺の両端の2点に赤い印がついているときである。正八面体の辺の数は12であり、印をつける順番を考慮すると求める確率は

$$\frac{12 \cdot 2!}{6^2} = \frac{2}{3}$$

となる。

(2)

$m_3=3$ となるのは、3回の試行後に1つの面の頂点である3点に赤い印がついているときである。正八面体の面の数は8であり、印をつける順番を考慮すると求める確率は

$$\frac{8 \cdot 3!}{6^3} = \frac{2}{9}$$

となる。また、 $m_3=1$ となるのは、3回の試行後に1つの辺の両端に赤い印がついているとき

である。このとき、印が付く頂点を $\{P_x, P_y\}$ ($x \neq y$) とすると、目の出方の組み合わせは

$$(x, x, y), (x, y, x), (y, x, x)$$

の3通りある。 x, y の入れ替えを考えると、印のつけ方は $3 \cdot 2! = 6$ 通りとなる。正八面体の辺の数は12であるから、求める確率は

$$\frac{12 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{3}$$

となる。

(3)

$m_4=2$ となるのは、4回の試行後に1組の互いに直角に交わる2辺に含まれる3点に赤い印がついているときである。このとき、印が付く頂点を $\{P_x, P_y, P_z\}$ ($x \neq y, y \neq z, z \neq x$) とすると、

目の出方の組み合わせは

$$(x, x, y, z), (x, y, x, z), (x, y, z, x), (y, x, x, z), (y, x, z, x), (y, z, x, x)$$

の6通りある。 x, y, z の入れ替えを考えると、印のつけ方は $6 \cdot 3! = 36$ 通りとなる。互いに直角に交わる2辺の選び方は12通りであるから、求める確率は

$$\frac{12 \cdot 36}{6^4} = \frac{1}{3}$$

となる。また、 $m_4=0$ となるのは、以下の2通り考えられる。

(i) 4回の試行後に1つの頂点にのみ印がついているとき

正八面体の頂点の数は6であるから、このときの場合の数は

$$6(\text{通り})$$

となる。

(ii) 4回の試行後に辺を共有しないような2つの頂点にのみ印がついているとき

このような2頂点の選び方は3通りあり、印のつけ方は余事象を考えることでそれぞれ

$$2^4 - 2 = 14 \text{通りあるから、このときの場合の数は}$$

$$3 \cdot 14 = 42(\text{通り})$$

となる。

以上、(i), (ii)より、求める確率は

$$\frac{6+42}{6^4} = \frac{1}{27}$$

となる。

(4)

4回の試行後に P_1 に印がついている事象をA、 P_2 に印がついている事象をBとすると、4回の試行後に辺 P_1P_2 が赤色に塗られる確率は $P(A \cap B)$ と表すことができる。このとき、ド・モルガンの法則より

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= 1 - \left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^4 + \left(\frac{5}{6} \right)^4 - \left(\frac{4}{6} \right)^4 \right\} \\ &= \frac{302}{6^4} \end{aligned}$$

より、4回の試行後に辺 P_1P_2 が赤色に塗られる確率は $\frac{302}{6^4}$ となる。また、4回の試行後に辺

P_1P_2 が赤色に塗られる、かつ $m_4=3$ であるのは、辺 P_1P_2 を含む1つの面の頂点である3点に赤い印がついているときである。このような3点の選び方は $\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_1, P_2, P_5\}$ の2通りあり、印のつけ方は(3)と同様にそれぞれ36通りあるから、4回の試行後に辺 P_1P_2 が赤色に塗られる、かつ $m_4=3$ である確率は

$$\frac{2 \cdot 36}{6^4} = \frac{72}{6^4}$$

となる。よって、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{72}{6^4}}{\frac{302}{6^4}} = \frac{36}{151}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	
	1	0	2	1	2	2	
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	2	1	－	2	4	－	1
(3)	セ	ソ	タ	チ	ツ		
	6	7	9	－	4		
(4)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ		
	8	1	4	6	3		

【解説】

(1)

球面 S の方程式を整理すると

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 14$$

となる。また、 ℓ 上の任意の点は実数 t を用いて $(3+t, 4+t, 6+2t)$ と表せる。球面 S 上にあるとき、 S の方程式に代入して

$$(3+t-2)^2 + (4+t+1)^2 + (6+2t)^2 = 14$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 6t + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+2)(t+4) = 0$$

$$\therefore t = -2, -4$$

となる。よって、 ℓ と S の 2 つの交点の座標は

$$t = -2 \text{ のとき, } (1, 2, 2)$$

$$t = -4 \text{ のとき, } (-1, 0, -2)$$

であるから、 $B(-1, 0, -2)$, $C(1, 2, 2)$ となる。

(2)

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (p, q, r)$ ($p^2 + q^2 + r^2 = 1$) とおくと、 $\vec{e} \perp \overrightarrow{AB}$, $\vec{e} \perp \overrightarrow{AC}$ となる。よっ

て、 $\vec{e} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\vec{e} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ が成り立つから、 $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 4)$ より

$$\begin{cases} -4p - 2q = 0 \\ -2p + 4r = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} q = -2p \\ r = \frac{1}{2}p \end{cases}$$

となる。これを $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ に代入して

$$p^2 + 4p^2 + \frac{1}{4}p^2 = 1$$

$$p^2 = \frac{4}{21}$$

$$\therefore p = \pm \frac{2}{\sqrt{21}}$$

と求まる。したがって、

$$(p, q, r) = \frac{1}{\sqrt{21}}(\pm 2, \mp 4, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

となるから、求める単位ベクトルは

$$(p, q, r) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2, 4, -1)$$

となる。

(3)

3 点 A, B, C はともに球面 S 上にあることから、三角形 ABC は球面 S に内接することがわかる。よって、三角形 ABC の外接円は球面 S の平面 ABC による断面となるから、三角形 ABC の外心は球面 S の中心 P を通り、平面 ABC に垂直な直線 m と平面 ABC の交点となる。平面 ABC の方程式は、(2) より法線ベクトルの一つが $(-2, 4, -1)$ であり、 $A(3, 2, -2)$ を通るから

$$-2(x-3) + 4(y-2) - (z+2) = 0$$

$$\therefore -2x + 4y - z = 4$$

となる。また、球面 S の中心は $P(2, -1, 0)$ であり、平面 ABC に垂直な法線ベクトルの一つが $(-2, 4, -1)$ であるから、直線 m 上の任意の点は実数 s を用いて $(2-2s, -1+4s, -s)$ と表せる。これを平面 ABC の方程式に代入して

$$-2(2-2s) + 4(-1+4s) - (-s) = 4$$

$$\therefore s = \frac{4}{7}$$

となるから、求める点の座標は

$$J\left(\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)$$

となる。

(4)

点 D から平面 ABC に下した垂線の足を H とすると、四面体 $ABCD$ の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot (\text{三角形 } ABC \text{ の面積}) \cdot DH$$

となる。よって、四面体 $ABCD$ の体積が最大になるのは DH の長さが最大になるときである。三角形 ABC は球面 S に内接することから、 DH の長さが最大になるのは、点 D が直線 m と球面 S の 2 交点のうち平面 ABC に関して球面 S の中心 P と同じ側にある方となるときである。このとき、 $PH = PJ$ となるから

$$DH = DP + PH$$

$$= (\text{球面 } S \text{ の半径}) + PJ$$

となる。(3) より、 $\overrightarrow{PJ} = \frac{4}{7}(-2, 4, -1)$ であるから

$$|\overrightarrow{PJ}|^2 = \frac{16}{49} \{(-2)^2 + 4^2 + (-1)^2\}$$

$$= \frac{16}{49} \cdot 21$$

$$= \frac{48}{7}$$

$$\therefore PJ = \sqrt{\frac{48}{7}}$$

となる。よって

$$DH = \sqrt{14} + \sqrt{\frac{48}{7}}$$

となる。また、 $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 4)$ より

$$(\text{三角形 } ABC \text{ の面積})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{20 \cdot 20 - 64}$$

$$= 2\sqrt{21}$$

であるから、求める四面体 $ABCD$ の体積の最大値は

$$\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{21} \cdot \left(\sqrt{14} + \sqrt{\frac{48}{7}} \right) = 8 + \frac{14\sqrt{6}}{3}$$

となる。

【解答】

(1)		ア	イ						
		6	1						
(2)	(i)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	
		3	6	1	6	5	1	5	
	(ii)	コ	サ						
		2	2						
	(iii)	シ	ス	セ	ソ				
		3	2	6	6				

【解説】

(1)

与式より、 $n=1$ のとき

$$a_1^2 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{5}$$

となる。また、 $n \geq 2$ のとき

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 3(n-1)^2 + 2(n-1) = 3n^2 - 4n + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n^2 + 2n \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$a_n^2 = 3n^2 + 2n - (3n^2 - 4n + 1) = 6n - 1$$

となり、 $n \geq 2$ のとき、 $6n - 1 > 0$ であるから

$$a_n = \sqrt{6n - 1}$$

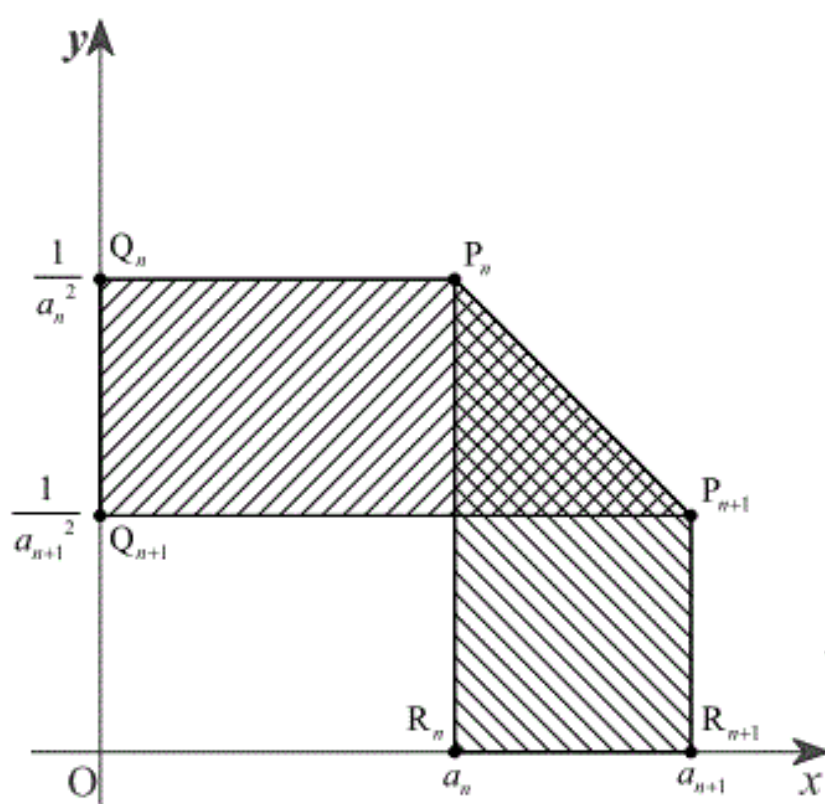
となる。これは $n=1$ のときも満たすから、求める数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \sqrt{6n - 1}$$

となる。

(2)

数列 $\{a_n\}$ が単調増加で常に正であることを考慮すると、四角形 $P_n Q_n Q_{n+1} P_{n+1}$ と四角形 $P_n R_n R_{n+1} P_{n+1}$ は下図の斜線部ようになる。



(i)

上図より、四角形 $P_n Q_n Q_{n+1} P_{n+1}$ の面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \cdot (P_n Q_n + P_{n+1} Q_{n+1}) \cdot Q_n Q_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a_n + a_{n+1}) \cdot \left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6n-1} + \sqrt{6n+5}) \cdot \left(\frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n+5} \right) \\ &= \frac{3(\sqrt{6n-1} + \sqrt{6n+5})}{(6n-1)(6n+5)} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

上図より、四角形 $P_n R_n R_{n+1} P_{n+1}$ の面積 T_n は

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \cdot (P_n R_n + P_{n+1} R_{n+1}) \cdot R_n R_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{a_{n+1}^2} \right) \cdot (a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n+5} \right) \cdot (\sqrt{6n+5} - \sqrt{6n-1}) \\ &= \frac{2(3n+1)(\sqrt{6n+5} - \sqrt{6n-1})}{(6n-1)(6n+5)} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{S_n} &= \frac{\frac{2(3n+1)(\sqrt{6n+5} - \sqrt{6n-1})}{(6n-1)(6n+5)}}{\frac{3(\sqrt{6n-1} + \sqrt{6n+5})}{(6n-1)(6n+5)}} \\ &= \frac{2(3n+1)(\sqrt{6n+5} - \sqrt{6n-1})}{3(\sqrt{6n+5} + \sqrt{6n-1})} \\ &= \frac{2(3n+1)(\sqrt{6n+5} - \sqrt{6n-1})(\sqrt{6n+5} + \sqrt{6n-1})}{3(\sqrt{6n+5} + \sqrt{6n-1})^2} \\ &= \frac{4(3n+1)}{(\sqrt{6n+5} + \sqrt{6n-1})^2} \\ &= \frac{4\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{6 + \frac{5}{n}} + \sqrt{6 - \frac{1}{n}}\right)^2} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{T_n}{S_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{6 + \frac{5}{n}} + \sqrt{6 - \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(iii)

(i)より

$$\begin{aligned} n' S_n &= \frac{3n'(\sqrt{6n-1} + \sqrt{6n+5})}{(6n-1)(6n+5)} \\ &= \frac{3n^{t-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{6 - \frac{1}{n}} + \sqrt{6 + \frac{5}{n}} \right)}{\left(6 - \frac{1}{n}\right) \left(6 + \frac{5}{n}\right)} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n' S_n$ が 0 以外の有限な値に収束するための必要条件是 $t = \frac{3}{2}$ である。逆

にこのとき

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n' S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\sqrt{6 - \frac{1}{n}} + \sqrt{6 + \frac{5}{n}} \right)}{\left(6 - \frac{1}{n}\right) \left(6 + \frac{5}{n}\right)} \\ &= \frac{6\sqrt{6}}{36} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n' S_n$ は 0 以外の有限な値 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ に収束する。以上より

$$t = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	5	5	5	1	5	1	5	1
	ケ							
	0							
(2)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	－	2	0	2	2	0	2	5
	ツ	テ	ト	ナ	ニ			
	2	2	1	0	2			

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2(x^2+5)-2x \cdot 2x}{(x^2+5)^2} \\&= \frac{-2(x^2-5)}{(x^2+5)^2} \\&= \frac{-2(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{(x^2+5)^2} \\f''(x) &= \frac{(-4x) \cdot (x^2+5)^2 + 2(x^2-5) \cdot 4x(x^2+5)}{(x^2+5)^4} \\&= \frac{4x(x^2-15)}{(x^2+5)^3} \\&= \frac{4x(x+\sqrt{15})(x-\sqrt{15})}{(x^2+5)^3}\end{aligned}$$

より、関数 $f(x)$ ($x \geq 0$) の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\sqrt{5}$	...	$\sqrt{15}$	...
$f'(x)$	+	+	0	－	－	－
$f''(x)$	－	－	－	－	0	+
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	↘	$\frac{\sqrt{15}}{10}$	↘

よって、 $f(x)$ は $x=\sqrt{5}$ のとき、極大値 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ をとる。また、変曲点の座標は $\left(\sqrt{15}, \frac{\sqrt{15}}{10}\right)$ となる。

(2)

$C_1: y = \frac{2x}{x^2+5}$ ($x \geq 0$) を x 軸方向に $-t$ だけ平行移動して得られる曲線 C_2 の方程式は

$$y = \frac{2(x+t)}{(x+t)^2+5} \quad (x \geq -t)$$

であるから、 C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2+5} &= \frac{2(x+t)}{(x+t)^2+5} \quad \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow 2x\{(x+t)^2+5\} &= 2(x+t)(x^2+5) \\ \Leftrightarrow 2tx^2+2t^2x-10t &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2+tx-5 &= 0 \quad (\because t > 0) \\ \therefore x &= \frac{-t+\sqrt{t^2+20}}{2} \quad (\because x \geq 0)\end{aligned}$$

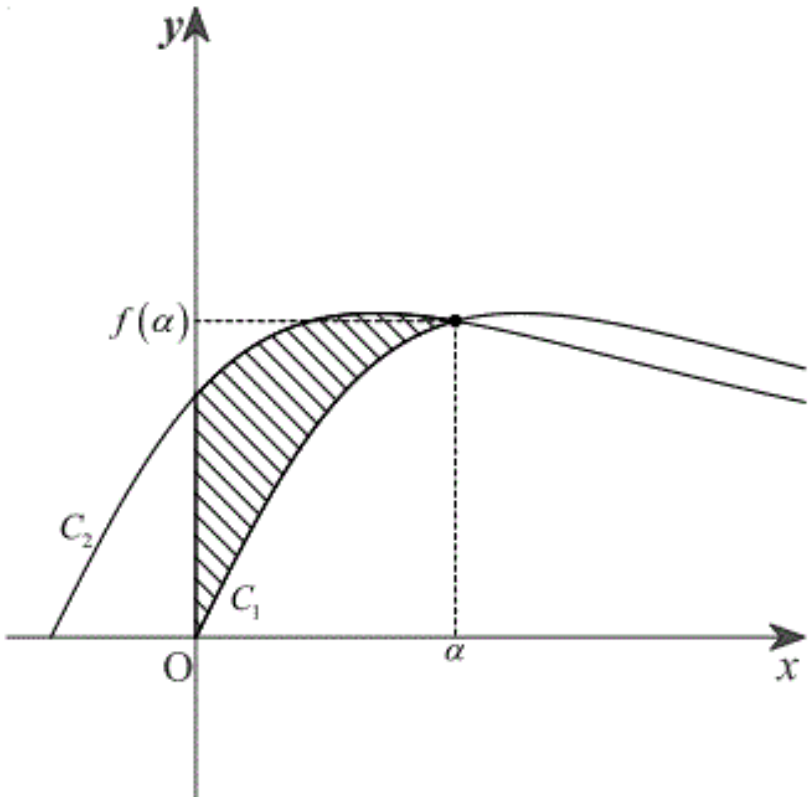
となる。よって、 $\alpha = \frac{-t+\sqrt{t^2+20}}{2}$ である。 $x = \alpha$ は $\textcircled{1}$ を満たすから

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha}{\alpha^2+5} &= \frac{2(\alpha+t)}{(\alpha+t)^2+5} \\ \therefore \frac{(\alpha+t)^2+5}{\alpha^2+5} &= \frac{\alpha+t}{\alpha}\end{aligned}$$

であり、 $\alpha = \frac{-t+\sqrt{t^2+20}}{2}$ より

$$\begin{aligned}\frac{(\alpha+t)^2+5}{\alpha^2+5} &= \frac{\frac{-t+\sqrt{t^2+20}}{2}+t}{\frac{-t+\sqrt{t^2+20}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{t^2+20}+t}{\sqrt{t^2+20}-t} \\ &= \frac{(\sqrt{t^2+20}+t)^2}{(\sqrt{t^2+20}-t)(\sqrt{t^2+20}+t)} \\ &= \frac{(t+\sqrt{t^2+20})^2}{20} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、(1)の増減表より、 C_1 、 C_2 および y 軸で囲まれた部分は以下の斜線部のようになる。



よって、 C_1 、 C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned}S(t) &= \int_0^\alpha \left(\frac{2(x+t)}{(x+t)^2+5} - \frac{2x}{x^2+5} \right) dx \\ &= \left[\log\{(x+t)^2+5\} - \log(x^2+5) \right]_0^\alpha \\ &= \log \frac{(\alpha+t)^2+5}{\alpha^2+5} - \log \frac{t^2+5}{5}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}S(t) &= \log \frac{(\alpha+t)^2+5}{\alpha^2+5} - \log \frac{t^2+5}{5} \\ &= \log \frac{(t+\sqrt{t^2+20})^2}{20} - \log \frac{t^2+5}{5} \\ &= 2 \log(t+\sqrt{t^2+20}) - \log(t^2+5) - 2 \log 2\end{aligned}$$

となる。 $S(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}S'(t) &= 2 \cdot \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+20}}}{t+\sqrt{t^2+20}} - \frac{2t}{t^2+5} \\ &= \frac{2}{\sqrt{t^2+20}} - \frac{2t}{t^2+5} \\ &= 2 \cdot \frac{t^2+5-t\sqrt{t^2+20}}{(t^2+5)\sqrt{t^2+20}} \\ &= 2 \cdot \frac{(t^2+5-t\sqrt{t^2+20})(t^2+5+t\sqrt{t^2+20})}{(t^2+5)\sqrt{t^2+20}(t^2+5+t\sqrt{t^2+20})} \\ &= 2 \cdot \frac{(t^2+5)^2 - (t\sqrt{t^2+20})^2}{(t^2+5)\sqrt{t^2+20}(t^2+5+t\sqrt{t^2+20})} \\ &= 2 \cdot \frac{-10t^2+25}{(t^2+5)\sqrt{t^2+20}(t^2+5+t\sqrt{t^2+20})} \\ &= -20 \cdot \frac{\left(t+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}{(t^2+5)\sqrt{t^2+20}(t^2+5+t\sqrt{t^2+20})}\end{aligned}$$

となり、上式において $t > 0$ のとき常に(分母) > 0 であるから、 $S(t)$ の増減表は下のようになる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	...
$S'(t)$	+	+	0	－
$S(t)$	↗	↗	最大値	↘

よって、 $S(t)$ は $t = \frac{\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値をとる。