

1

[解答]

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	6	4	7	6	8
(2)	カ	キ	ク	ケ	
	1	3	4	4	
(3)	コ	サ	シ		
	6	2	4		
(4)	ス	セ	ソ	タ	
	1	3	4	4	

[解説]

(1)

C, D, E, F, G, Hの6人が2冊の本R, Sの中から選ぶため, A, Bがそれぞれ本P, 本Qを手に入れることができるような本の選び方は, $2^6 = 64$ (通り)である。また, AとBが本を手に入れることができるとき, AとBがどの本を手に入れるか選ぶ組み合わせは,

${}_4P_2 = 12$ (通り)である。さらに, C, D, E, F, G, Hの6人が残りの2冊の本の中から選ぶため, その組み合わせは, $2^6 = 64$ (通り)である。よって, 求める選び方は, $12 \cdot 64 = 768$ (通り)である。

(2)

A, B, C, D, E, F, G, Hの8人から, 本を手に入れることができる3人を選ぶ組み合わせは, ${}_8C_3 = 56$ (通り)である。さらに, その3人が4冊の本P, Q, R, Sから本を選ぶ組み合わせは, ${}_4P_3 = 24$ (通り)である。残りの5人が残りの1冊を選ぶため, その組み合わせは1(通り)である。よって, 求める選び方は, $56 \cdot 24 \cdot 1 = 1344$ (通り)である。

(3)

A, Bが4冊の本P, Q, R, Sから本を選ぶ組み合わせは, ${}_4P_2 = 12$ (通り)である。残りの6人が残りの2冊から本を選ぶ組み合わせは, $2^6 = 64$ (通り)である。この64通りのうち, 6人の中から1人だけがどちらか1冊の本を選ぶ組み合わせは, ${}_2C_1 \cdot {}_6C_1 = 12$ (通り)である。よって, 求める組み合わせは, $12 \cdot (64 - 12) = 624$ (通り)である。

(4)

Aに選ばれる本と誰にも選ばれない本を選ぶ組み合わせは, ${}_4P_2 = 12$ (通り)である。残りの7人が残りの2冊から本を選ぶ組み合わせは, $2^7 = 128$ (通り)である。この128通りのうち, 残りの7人の中から1人だけがどちらか1冊の本を選ぶ組み合わせは, ${}_2C_1 \cdot {}_7C_1 = 14$ (通り)である。また, A以外の7人がどちらか1冊の本のみを選ぶ組み合わせは, 2(通り)である。よって, 求める組み合わせは, $12 \cdot (128 - 14 - 2) = 1344$ (通り)である。

2

[解答]

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	2	3	1	3	5	2	5	1	2
(2)	コ	サ							
	2	2							
(3)	シ	ス	セ	ソ	タ				
	2	2	2	4	2				
(4)	テ	ト	ナ						
	2	2	2						

[解説]

(1)

与式は、 $2^{2x}+2^{-2x}=3$ と表される。このとき、

$$\begin{aligned}2^{2x}+2^{-2x}&=3 \\ \Leftrightarrow 2^{2x}\cdot 2^{2x}+2^{-2x}\cdot 2^{2x}&=3\cdot 2^{2x} \\ \Leftrightarrow \left(2^{2x}\right)^2-3\cdot 2^{2x}+2^0&=0 \\ \therefore t^2-3t+1&=0\left(\because t=2^x\right)\end{aligned}$$

が成り立つ。この2次方程式を解くと、

$$\begin{aligned}t&=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2} \\ &=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

と求められる。このとき、

$$\begin{aligned}4^x&=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow \log_2 2^{2x}&=\log_2\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 2x&=\log_2\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x&=\log_2\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow x&=\log_2\sqrt{\frac{(\sqrt{5}\pm 1)^2}{4}} \\ \therefore x&=\log_2\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\end{aligned}$$

である。

(2)

$y=-x+1$ が成り立つため、 $(a+1)^{2x}=u$ とおくと、 $a>0$ であるため、 $u>0$ である。この

とき、

$$\begin{aligned}(a+1)^{2x}+(a+1)^{-2x+2}&=b \\ \Leftrightarrow \left\{(a+1)^{2x}\right\}^2+(a+1)^{-2x+2}\cdot (a+1)^{2x}&=b\cdot (a+1)^{2x} \\ \Leftrightarrow \left\{(a+1)^{2x}\right\}^2-b\cdot (a+1)^{2x}+(a+1)^2&=0 \\ \Leftrightarrow u^2-bu+(a+1)^2&=0\end{aligned}$$

である。 x と u 、 x と y は1対1対応するため、問題の条件は、2次方程式

$$u^2-bu+(a+1)^2=0\text{が}0\text{より大きい実数解を持つことと同値である。}$$

$$f(u)=u^2-bu+(a+1)^2,\ f(u)=0\text{の判別式を}D\text{とおくと、その条件は、以下のように}$$

場合分けされる。

[1] 0より大きい解のみを持つとき

条件は、

$$\begin{aligned}&\begin{cases}D\geq 0 \\ f(0)>0 \\ b>0\end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases}(-b)^2-4\cdot 1\cdot (a+1)^2\geq 0 \\ (a+1)^2>0 \\ b>0\end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases}b^2\geq 4(a+1)^2 \\ (a+1)^2>0 \\ b>0\end{cases} \\ \therefore &b\geq 2(a+1)\end{aligned}$$

である。

[2] 負の解を持つとき

条件は

$$\begin{aligned}f(0)&<0 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2&<0\end{aligned}$$

であるが、 $(a+1)^2>0$ であるため、これを満たす a は存在しない。

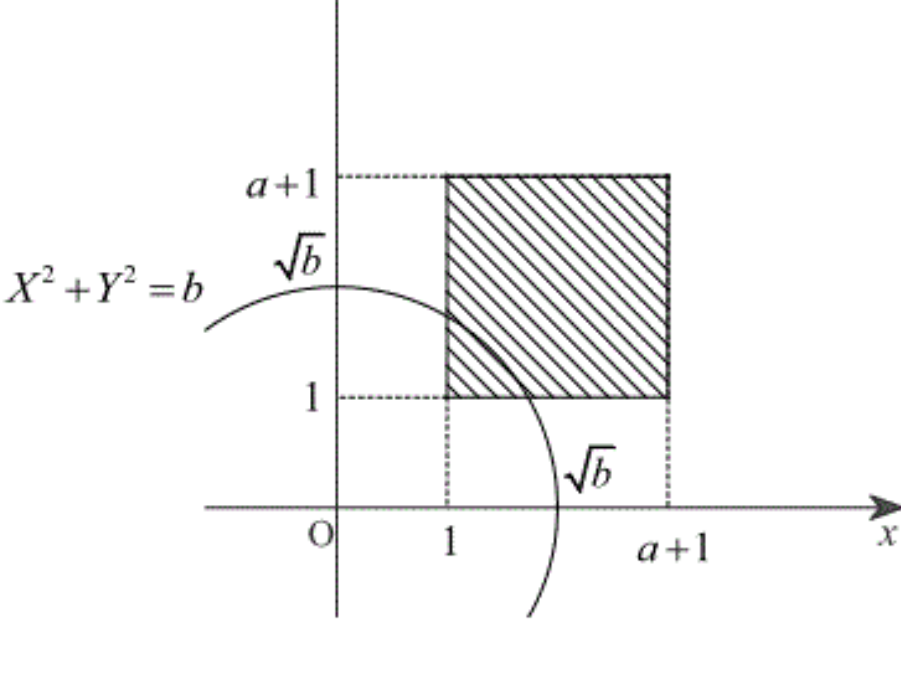
以上、[1]、[2]より、求める範囲は、 $b\geq 2a+2$ である。

(3)

$(a+1)^x=X$ 、 $(a+1)^y=Y$ とおくと、 $X^2+Y^2=b$ となる。これを満たす X,Y が

$1\leq X\leq a+1$ 、 $1\leq Y\leq a+1$ に存在する条件を求める。この条件を図示すると、下図のよ

うになる。



上図のように、円 $X^2+Y^2=b$ が上図の境界を含んだ斜線部分と共有点を持つことが求める条

件である。それは、点 $(1,1)$ が円の内部または円周上に存在し、かつ点 $(a+1,a+1)$ が円の外部

または円周上に存在することと同値である。 $g(X,Y)=X^2+Y^2-b$ とおくと、求める条件

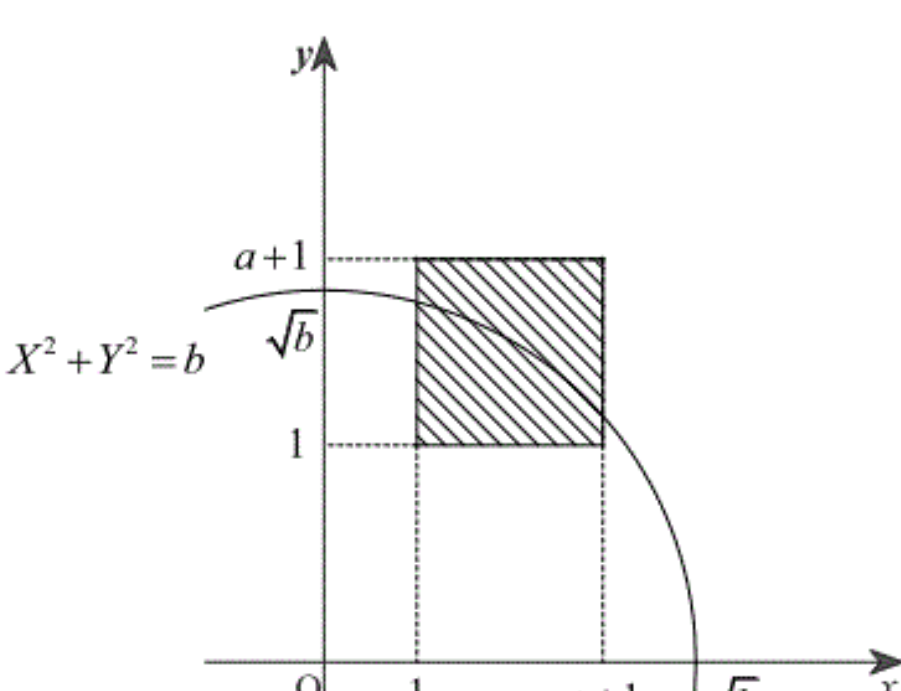
は、

$$\begin{aligned}&\begin{cases}g(1,1)\leq 0 \\ g(a+1,a+1)\geq 0\end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases}2\leq b \\ b\leq 2(a+1)^2\end{cases} \\ \therefore &2\leq b\leq 2a^2+4a+2\end{aligned}$$

である。

(4)

(3)と同様に X,Y を定義し、求める条件を図示すると、下図のようになる。



上図のように、 $1\leq X\leq a+1$ の範囲で円 $X^2+Y^2=b$ が常に上図の境界を含んだ斜線部分と

共有点を持つことが求める条件である。よって、求める条件は、

$$\begin{aligned}&\begin{cases}g(1,1)\leq 0 \\ g(a+1,1)\leq 0 \\ g(1,a+1)\geq 0 \\ g(a+1,a+1)\geq 0\end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases}2-b\leq 0 \\ (a+1)^2+1-b\geq 0 \\ (a+1)^2+1-b\leq 0 \\ 2(a+1)^2-b\geq 0\end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases}2\leq b\leq 2a^2+4a+2 \\ b=a^2+2a+2\end{cases}\end{aligned}$$

となるが、

$$2a^2+4a+2-(a^2+2a+2)=a^2+2a$$

であり、 $a>0$ より、 $2a^2+4a+2>a^2+2a+2$ である。また、

$$(a^2+2a+2)-2=a^2+2a$$

より、同じ理由から $a^2+2a+2>2$ である。よって、 $b=a^2+2a+2$ は

$2\leq b\leq 2a^2+4a+2$ を満たすので、 a と b に成り立つ関係式は、

$b=a^2+2a+2$ となる。

3

[解答]

(1)	ア	イ	ウ	エ
	2	2	7	3
(2)	オ	カ	キ	
	2	1	4	
(3)	ク	ケ	コ	サ
	1	2	1	2

[解説]

(1) a は正の定数であり、 e^{θ} は単調増加するため、 r も単調増加する。よって、極座標において、

$$B_1\left(ae^{\frac{\pi}{6}},\frac{\pi}{6}\right),\ B_2\left(ae^{\frac{7}{6}\pi},\frac{7}{6}\pi\right),\ D_1\left(ae^{\frac{\pi}{3}},\frac{\pi}{3}\right),\ D_2\left(ae^{\frac{4}{3}\pi},\frac{4}{3}\pi\right) \text{である。}$$

$OB_1=ae^{\frac{\pi}{6}},\ OD_2=ae^{\frac{4}{3}\pi}$ となるため、三角形 OB_1D_2 の面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot ae^{\frac{\pi}{6}}\cdot ae^{\frac{4}{3}\pi}\cdot\left|\sin\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi\right)\right|$$

$$=\frac{1}{4}a^2e^{\frac{3}{2}\pi}$$

である。この面積が $\frac{1}{8}e^{\frac{3}{2}\pi}$ であるため、

$$\frac{1}{4}a^2e^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{1}{8}e^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\because a>0)$$

である。また、

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot a\cdot ae^{\frac{\pi}{6}}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{4}a^2e^{\frac{\pi}{6}}$$

であり、

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot ae^{\frac{7}{6}\pi}\cdot ae^{\frac{4}{3}\pi}\cdot\left|\sin\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{7}{6}\pi\right)\right|$$

$$=\frac{1}{4}a^2e^{\frac{5}{2}\pi}$$

であるため、

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{4}a^2e^{\frac{5}{2}\pi}}{\frac{1}{4}a^2e^{\frac{\pi}{6}}}$$

$$=e^{\frac{7}{3}\pi}$$

である。

(2)

$$\frac{dx}{d\theta}=a\left\{\left(e^{\theta}\right)'\cdot\cos\theta+e^{\theta}\cdot\left(\cos\theta\right)'\right\}$$

$$=ae^{\theta}\left(\cos\theta-\sin\theta\right)$$

であり、

$$\frac{dy}{d\theta}=a\left\{\left(e^{\theta}\right)'\cdot\sin\theta+e^{\theta}\cdot\left(\sin\theta\right)'\right\}$$

$$=ae^{\theta}\left(\sin\theta+\cos\theta\right)$$

であるため、曲線 C の長さは、

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta \\ &=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left\{e^{2\theta}\left(\cos\theta-\sin\theta\right)^2+e^{2\theta}\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2\right\}}d\theta \\ &=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2e^{2\theta}}d\theta \\ &=\int_0^{2\pi}e^{\theta}d\theta \\ &=\left[e^{\theta}\right]_0^{2\pi} \\ &=e^{2\pi}-1 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dy}{d\theta} \\ &= \frac{ae^{\theta}\left(\sin\theta+\cos\theta\right)}{ae^{\theta}\left(\cos\theta-\sin\theta\right)} \\ &= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta} \\ &= \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} \end{aligned}$$

であり、

$$\frac{y}{x}=\frac{ae^{\theta}\sin\theta}{ae^{\theta}\cos\theta}$$

$$=\tan\theta$$

であるため、直線 OP と x 軸のなす角は θ であり、直線 l と x 軸のなす角を β とすると、

$$\tan\beta=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta} \text{である。ただし、}$$

$$\sin\theta=\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\therefore\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$$

より、 $\tan\beta$ は $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$ 以外で定義できる。このとき、

$$\begin{aligned} \tan(\beta-\theta) &= \frac{\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\cdot\tan\theta} \\ &= \frac{\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}-\tan\theta}{1+\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\cdot\tan\theta} \\ &= \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan\theta}\cdot\frac{1-\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるため、 $\beta-\theta=\frac{\pi}{4}+n\pi$ (n は整数) である。これは、 α と等しい。ここで、 $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$

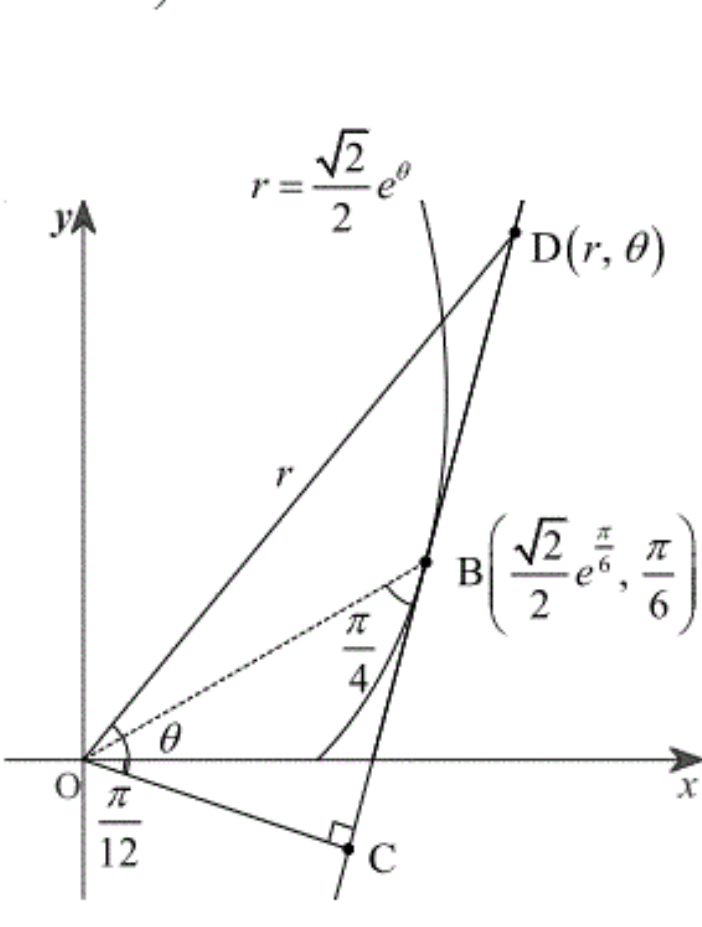
であるため、 $n=0$ である。よって、 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ である。また、 $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$ のとき、 $\frac{dx}{d\theta}=0$ で

あるため、接線 l は y 軸に平行である。さらに、このとき $\frac{y}{x}=1\Leftrightarrow x=y$ であるため、

$$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi \text{ のときも接線 } l \text{ と直線 } OP \text{ のなす角は、} \alpha=\frac{\pi}{4} \text{ である。}$$

(3)

B_1 の極座標は、 $B_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{6}},\frac{\pi}{6}\right)$ である。求める直線上の極座標を (r,θ) とすると、図は以下になる。



上図について、 $OC=OD\cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)$ 、 $OC=OB\cos\frac{\pi}{4}$ が成り立ち、 $\theta<0$ のときも、

$OC=OD\cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)$ が成り立つため、接線の極方程式は、

$$OD\cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)=OB\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}$$

である。

4

[解答]

(1)		ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
		1	6	3	1	1	6	－	3
(2)	(i)	ケ	コ	サ					
		0	2	3					
	(ii)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ		
		4	3	3	7	4	3		

[解説]

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(\sqrt{3} \sin x)' \cdot (2 - \sqrt{3} \cos x) - \sqrt{3} \sin x \cdot (2 - \sqrt{3} \cos x)'}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{3} \cos x \cdot (2 - \sqrt{3} \cos x) - \sqrt{3} \sin x \cdot \sqrt{3} \sin x}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} \cos x - 3}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{(2 - \sqrt{3} \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

であるため、増減表は、以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	－	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

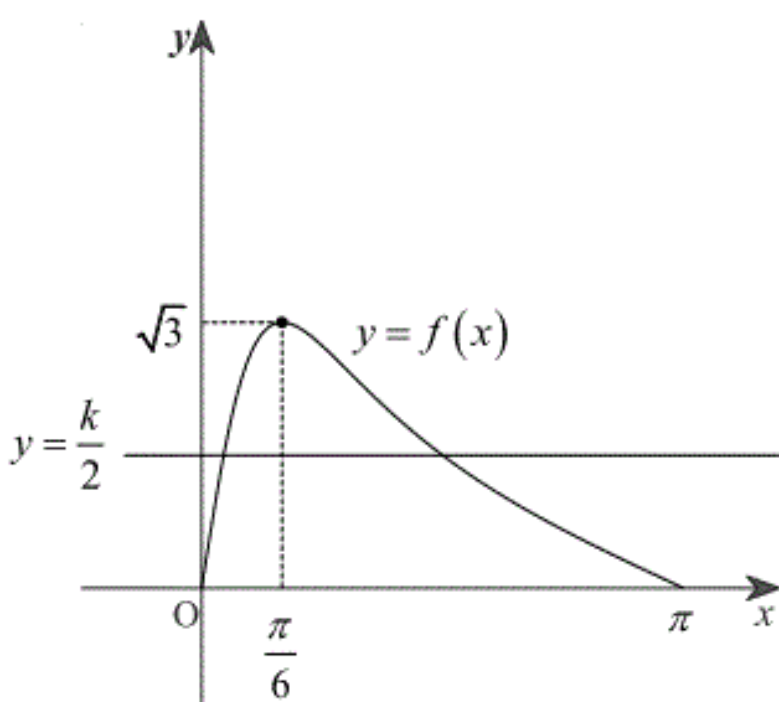
よって、 $x = \frac{\pi}{6}$ のとき極大値 $\sqrt{3}$ をとり、 $x = \frac{11}{6}\pi$ のとき極小値 $-\sqrt{3}$ をとる。

(2) (i)

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{2(2 - \sqrt{3} \cos x)'}{2 - \sqrt{3} \cos x} - k \\
 &= \frac{2\sqrt{3} \sin x}{2 - \sqrt{3} \cos x} - k \\
 &= 2f'(x) - k
 \end{aligned}$$

であるため、 $g'(x)$ と 0 の大小関係は、 $f'(x)$ と $\frac{k}{2}$ の大小関係と一致する。このとき、

$y = f(x)$ と $y = \frac{k}{2}$ について、位置関係を図示すると、下図のようになる。



上図のように $y = f(x)$ と $y = \frac{k}{2}$ が 2 つの共有点を持つとき、 $2f(x) - k$ の値が正から負に

変化する点が $\frac{\pi}{6} < x < \pi$ の範囲にちょうど 1 つ存在し、それは $g(x)$ がちょうど 1 つの極大値

を持つことを意味する。よって、 k のとり得る値の範囲は、

$$\begin{aligned}
 f(0) &< \frac{k}{2} < f\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 \Leftrightarrow 0 &< \frac{k}{2} < \sqrt{3} \\
 \therefore 0 &< k < 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

である。

(ii)

$x = \alpha$ で極大値をとるとすると、 $g'(\alpha) = 0$ が成り立つ。よって、 $f(\alpha) = \frac{k}{2}$ である。また、

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) &= 2 \log(2 - \sqrt{3} \cos \alpha) - k\alpha \\
 &= 2 \log(2 - \sqrt{3} \cos \alpha) - 2\alpha f(\alpha)
 \end{aligned}$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}
 g'(\alpha) &= \frac{2\sqrt{3} \sin \alpha}{2 - \sqrt{3} \cos \alpha} - 2f(\alpha) - 2\alpha f'(\alpha) \\
 &= 2f(\alpha) - 2f(\alpha) - 2\alpha f'(\alpha) \\
 &= -2\alpha f'(\alpha) \\
 &= -\frac{4\alpha\sqrt{3} \left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{(2 - \sqrt{3} \cos \alpha)^2}
 \end{aligned}$$

となる。(i) より、 α の取りうる値の範囲は $\frac{\pi}{6} < \alpha < \pi$ であるため、増減表は以下のようになる。

α	$\frac{\pi}{6}$	...	π
$g'(\alpha)$		+	
$g(\alpha)$	$g\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\nearrow$	$g(\pi)$

このとき、

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \log\left(2 - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot f\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \log \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi
 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
 g(\pi) &= \log(2 - \sqrt{3} \cos \pi)^2 \\
 &= \log(2 + \sqrt{3})^2 \\
 &= \log(7 + 4\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

である。よって、 $M_1 = \log \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$ 、 $M_2 = \log(7 + 4\sqrt{3})$ である。