

1996 年度 入学試験問題

工学部 数学

注 意

- (1) 解答用紙は (一) と (二) のそれぞれ 1 枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙 (一), (二) にそれぞれ表面に 2 か所、裏面に 1 か所ある。合計 6 か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔1〕の解答は解答用紙(一)の〔1〕の欄に記入。
問題〔2〕の解答は解答用紙(一)の〔2〕の欄に記入。
問題〔3〕の解答は解答用紙(二)の〔3〕の欄に記入。
問題〔4〕の解答は解答用紙(二)の〔4〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は 2 ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔1〕 多項式 $f(x)$ が次の性質 (A), (B) をみたすとする。

(A) 定数 a, b がどのような値であっても, x の関数 $f(x-a) + f(x-b)$ は $x = \frac{1}{2}(a+b)$ で最大となる。

(B) 定数 a, b, c がどのような値であっても, x の関数

$f(x-a) + f(x-b) + f(x-c)$ は $x = \frac{1}{3}(a+b+c)$ で最大となる。

$f(x)$ の導関数を $g(x)$ で表すとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $g(x)$ は奇関数であることを示せ。

(2) $g(x+y) = g(x) + g(y)$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(1) = g(1) = -1$ のとき $f(x)$ を求めよ。

(4) (3) で求めた $f(x)$ に対して, どんな定数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ についても,

x の関数 $\sum_{i=1}^n f(x-a_i)$ は $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ で最大となることを示せ。 (50点)

〔2〕 a を 1 以上の整数とする。 x の 2 次方程式

$$x^2 - 2ax - (4a+3) = 0$$

の 2 つの解を p_1, p_2 ($p_1 < p_2$) とし,

$$p_i = q_i + r_i \quad (i=1, 2)$$

とする。ここで, q_i は整数であり, $0 \leq r_i < 1$ である。

以下の問いに答えよ。

(1) p_1 を a で表せ。

(2) $-2 < p_1 < -1$ であることを示せ。

(3) q_1 の値を求め, r_1 を a で表せ。

(4) q_2, r_2 を a で表せ。

(5) $r_2 \geq 2\sqrt{2} - 2$ であることを示せ。

(50点)

〔3〕 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ について以下の問いに答えよ。

- (1) この曲線を図示せよ。
- (2) この曲線と x 軸および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) この曲線が放物線の一部であることを示せ。
- (4) この曲線上の点 (p, q) ($p > 0, q > 0$) における接線の方程式と法線の方程式とを求めよ。
- (5) この曲線と直線 $y = -\frac{1}{3}x - 1$ に同時に接する円のうち、半径が最小となるものの方程式を求めよ。 (50点)

〔4〕 第1象限内の曲線 $C: y = f(x)$ ($x > 1$) は点 $A(\sqrt{2}, 1)$ を通り、かつ、 C 上の任意の点 $P(x, y)$ での接線が x 軸と交わる点を $Q(q, 0)$ とするとき $qx = 1$ であるという。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のみたす微分方程式を求めよ。
- (2) (1)の微分方程式を解き、曲線 C を図示せよ。
- (3) $\log|x + \sqrt{x^2 + a}|$ の導関数を求めよ。ただし、 a は定数で $a \neq 0$ である。
- (4) 不定積分 $I = \int \sqrt{x^2 + a} \, dx$ を部分積分を用いて求めよ。
- (5) 原点 O と点 A を結ぶ線分 OA , x 軸, および曲線 C で囲まれる部分の面積 S を求めよ。 (50点)