

1998 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は (一) と (二) のそれぞれ 1 枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙 (一)、(二) にそれぞれ表面に 2 か所、裏面に 1 か所ある。合計 6 か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅰ〕は 7 題より 5 題を選択し解答すること。
解答用紙 (一) の〔Ⅰ〕は 5 つの部分に分かれている。
各部分の〔 〕に選択した問題の番号(順不同)を記入し、そこに解答すること。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は 2 ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔 I 〕 次の問題(1)～(7)より 5 問を選び、解答せよ。解答用紙の所定欄に選択した問題の番号を記入した後に解答せよ。

(1) m ($m > 1$) を定数とする。 $\sin mx = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(2) $\int_0^{2\pi} \sin y \sin(x+y) dy = f(x) \int_0^{\pi} \sin^2 y dy$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(3) 実数全体で定義された関数 $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 + 1}$ の最小値を求めよ。

(4) 曲線 $y = \frac{1}{\log 2} (2^{x-1} + 2^{-x-1})$ ($-1 \leq x \leq 1$) の長さ L を求めよ。

(5) 長さ 2 の線分 OA を直径とする円の任意の接線に、 O から下ろした垂線とその接線との交点を P とする。 O を極、半直線 OA を始線としたときの点 P の軌跡の極方程式を求めよ。

(6) 複素数平面の原点を O とし、 $1, \frac{3 + \sqrt{3}i}{2}$ の表わす点をそれぞれ A, B とする。
 O を中心として、点 A, B を角 α だけ回転して得られる点をそれぞれ C, D とする。
このとき、 $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ の共通部分の面積を α を用いて表わせ。ただし、
 $|\alpha| < \frac{\pi}{6}$ とする。

(7) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ とし、 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

また、 $S_n = x_n - y_n$, $T_n = 3x_n + 2y_n$ とおく。 S_n, T_n, x_n, y_n を求めよ。

〔Ⅱ〕 円に内接する四角形 ABCD において、 $AB=AD=1$ 、 $\angle BAD=90^\circ$ 、 $\angle BAC=\theta$ とし、対角線 AC と対角線 BD の交点を E とする。以下の間に答えよ。

- (1) AE, BE, CE, DE の長さを、 $\sin\theta, \cos\theta$ を用いて表わせ。
- (2) $\sin\angle AED$ を、 $\sin\theta, \cos\theta$ を用いて表わせ。
- (3) $\triangle ABE, \triangle BCE, \triangle CDE, \triangle DAE$ の外心をそれぞれ P, Q, R, S とするとき、四角形 PQRS の面積を求めよ。 (50点)

〔Ⅲ〕 直線 $l: y=mx$ ($m<0$) と曲線 $C: y=x^3-3x^2$ について、以下の間に答えよ。

- (1) 原点 O 以外の点で直線 l と曲線 C が接するとき、直線 l と曲線 C で囲まれる図形の面積を求めよ。
- (2) 原点 O 以外にも点 $P(\alpha, m\alpha)$, $Q(\beta, m\beta)$ ($\alpha<\beta$) で直線 l と曲線 C が交わる時、線分 OP と曲線 C とで囲まれる図形の面積を S_1 , 線分 PQ と曲線 C とで囲まれる図形の面積を S_2 とする。 $S_1=S_2$ のとき、 α, β, m の値を求めよ。 (50点)

〔Ⅳ〕 $0<r<b$ とする。 xy 平面の円 $C: x^2+(y-b)^2=r^2$ と直線 $l: 3x+5y=15b$ について、以下の間に答えよ。

- (1) 円 C の中心から直線 l までの距離を求めよ。
- (2) 円 C を x 軸の周りに 1 回転して得られる xyz 空間の立体 K の体積 V を求めよ。
- (3) この立体 K の表面の方程式を求めよ。
- (4) 円 C を直線 l の周りに 1 回転して得られる xyz 空間の立体の体積 W を求めよ。 (50点)