

1999 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は (一) と (二) のそれぞれ 1 枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙 (一)、(二) にそれぞれ表面に 2 か所、裏面に 1 か所ある。合計 6 か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は 2 ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔I〕

(1) 空間のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき, $|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値を求めよ。

(2) $z^2 = \frac{-3+3i}{2}$ を満たす複素数 z を極形式で求めよ。

ただし, i は虚数単位とする。

(3) $(x^2-4x+3)P(x) - (x^2-6x+8)Q(x) = 3$ が x についての恒等式になるように, x の1次式 $P(x)$, $Q(x)$ を定めよ。

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ について, $T = B^{-1}AB$ とする。

T , T^n , A^n を求めよ。ただし, n は自然数とする。

(60点)

〔II〕 数列 $\{a_n\}$ および点列 P_n , Q_n ($n=0, 1, 2, \dots$) を次のように定める。

$a_0=0$, $Q_0(0, 0)$ とし, $y=e^{-x}$ で表わされる曲線 C 上の点 $P_n(a_n, e^{-a_n})$ における接線が x 軸と交わる点を $Q_{n+1}(a_{n+1}, 0)$ とする。以下の問に答えよ。

(1) a_n を n で表わせ。

(2) 曲線 C と線分 $P_n Q_{n+1}$ および線分 $P_{n+1} Q_{n+1}$ とで囲まれた領域の面積を S_n とする。 S_n を n で表わし, $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

(40点)

〔Ⅲ〕 $a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$ とする。また $x > 0$ に対して

$f(x) = \frac{1}{2} (\log_2 x + \log_3 x)$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) すべての $x > 0$ に対して $f(x) = k \log_{10} x$ が成り立つような k を a , b で表わせ。
- (2) $0 < x < y$ のとき $f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$ を示せ。
- (3) $f\left(\frac{5}{2}\right) > \frac{(a+b)^2}{4ab}$ を示せ。

(40点)

〔Ⅳ〕 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ について以下の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ の極値を求め、曲線 $C: y = f(x)$ の概形を描け。
- (2) $a > 0$ に対して曲線 C の $a \leq x \leq a+1$ の部分の長さ $L(a)$ を求めよ。
- (3) $L(a)$ の最小値を求めよ。
- (4) 曲線 C 上の点 $(p, f(p))$ における曲線 C の接線 l の方程式を求めよ。さらに、 x 軸に接する円 O が l に点 $(p, f(p))$ で接するとき、円 O の半径 r を p で表わせ。

(60点)