

〔 I 〕 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} + \sqrt{2} \sin x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) の最大値, 最小値を求め, そのときの x の値を求めよ。

(2) $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $w = \cos \beta + i \sin \beta$ ($0 < \beta < \alpha < \pi$) とする。 $z + w$, $z - w$ の絶対値と偏角を求め, $|z + w| = 1$ となるときの $\alpha - \beta$ の値を求めよ。

(3) $x_1 = 1$ とし, 関数 $f_n(x) = \sum_{k=1}^n (x - \frac{1}{2} x_k)^2$ ($n = 1, 2, \dots$) を最小にする x の値を x_{n+1} とする。 x_{n+1} と x_n の間に成り立つ関係式を求め, x_n ($n \geq 2$) を n を用いて表せ。

(60点)

〔Ⅱ〕 xyz 空間の 3 点を $A(4, 5, 6)$, $B(7, 11, -3)$, $C(4, 9, 4)$ とし, 2 点 A, B を通る直線を ℓ とする。次の各問に答えよ。

- (1) t を媒介変数として, ℓ 上の点の座標 (x, y, z) を t を用いて表せ。
- (2) 点 C からの距離が最小となる ℓ 上の点 H の座標とベクトル $\overrightarrow{CH}$ の大きさを求めよ。
- (3) 大きさ 1 のベクトル $\overrightarrow{AP}$ が $\overrightarrow{CH}$ と $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるとき, 点 $P(p, q, r)$ をすべて求めよ。

(40点)

〔Ⅲ〕 x, y, z を実数とし, E を 2 次の単位行列, O を 2 次の零行列とする。

行列 $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = O$ をみたすとき, 次の各問に答えよ。

- (1) y のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $x^2 + y^2 + z^2$ を最小にする x, y, z の値を求めよ。

(50点)

〔Ⅳ〕 xy 平面上の点 $A(-2, 0)$ と 2 点

$$P(p, \sqrt{1-p^2}), \quad Q(-p, \sqrt{1-p^2}) \quad (0 < p < 1)$$

を考える。 $\angle PAQ = \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$) とおくとき、次の各問に答えよ。

- (1) $\cos \theta$ を p で表せ。
- (2) θ が最大となる p を求めよ。
- (3) 三角形 PAQ を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を p で表せ。
- (4) (3) で得られた回転体の体積の最大値を求めよ。

(50点)