数　学

〔Ⅰ〕 m，n を自然数として，次の問に答えよ。

(1) n^2+n が 2 で割り切れることを証明せよ。

(2) $m^3+2n^3+3n^2-m+n$ が 6 で割り切れることを証明せよ。

〔Ⅱ〕　$\triangle$ABC において，頂角 $\angle$A，$\angle$B，$\angle$C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする。次の関係式が成立するとき，$\triangle$ABC はどのような形の三角形か。

$$a\sin A(\sin B-\sin C)=b\sin^2 B-(b+c)\sin B\sin C-c\cos^2 C+c$$

〔Ⅲ〕 図のような長方形 $A_1A_2A_3B_1$ において，$A_1A_2 = 1$，$A_2A_3 = a\,(a < 1)$ とする。辺 A_1A_2 上に点 B_2，辺 B_1A_3 上に点 A_4 をとり，四角形 $A_1B_2A_4B_1$ が正方形となるようにする。このとき，長方形 $A_1A_2A_3B_1$ と長方形 $A_2A_3A_4B_2$ は相似となった。

次に，長方形 $A_2A_3A_4B_2$ において，辺 A_2A_3 上に点 B_3，辺 B_2A_4 上に点 A_5 をとり，四角形 $A_2B_3A_5B_2$ が正方形となるようにする。

さらに，これを繰り返し，長方形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}B_k\,(k = 3, 4, 5, \cdots)$ において，辺 A_kA_{k+1} 上に点 B_{k+1}，辺 B_kA_{k+2} 上に点 A_{k+3} をとり，四角形 $A_kB_{k+1}A_{k+3}B_k$ が正方形となるようにする。

次の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 長方形 $A_3A_4A_5B_3$ の面積を求めよ。

(3) n 個の長方形 $A_1A_2A_3B_1$，$A_2A_3A_4B_2$，$\cdots$，$A_nA_{n+1}A_{n+2}B_n$ の面積の和 S と周の長さの和 L を求めよ。