

数 学

[I] $f(x) = x|x + a| - x|x - a^2| \quad (a > 0)$

について以下の問に答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) $f(x)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

〔Ⅱ〕 $0 < x \leq y \leq z$ である整数 x, y, z について以下の問に答えよ。

(1) $xyz + x + y + z = xy + yz + zx + 5$ を満たす整数 x, y, z をすべて求めよ。

(2) $xyz = x + y + z$ を満たす整数 x, y, z をすべて求めよ。

〔Ⅲ〕 $\angle A = 2\alpha$ ($< 45^\circ$) かつ $AB = AC = 1$ である二等辺三角形 ABC で辺 AB 上に点 A_1 , 辺 AC 上に点 A_2 を $AA_1 = AA_2$ かつ $\angle A_2A_1A = \angle CA_1B$ となるようにとる。以下の問に答えよ。

- (1) A_1A_2 の長さ L_1 を α を用いて表せ。
- (2) A_1C 上に $A_1A_2 = A_1A_3$ となるように点 A_3 をとる。 A_2A_3 の長さ L_2 を α を用いて表せ。
- (3) 次に A_2C 上に $A_2A_3 = A_2A_4$ となる点 A_4 をとる。このように $A_{2m-1}C$ 上に

$$A_{2m-1}A_{2m} = A_{2m-1}A_{2m+1}$$

となるように点 A_{2m+1} をとり, $A_{2m}C$ 上に

$$A_{2m}A_{2m+1} = A_{2m}A_{2m+2}$$

となるように点 A_{2m+2} をとる。ただし $m = 1, 2, 3, \dots$ とする。

このとき $A_{2m-1}A_{2m}$ の長さ L_{2m-1} と $A_{2m}A_{2m+1}$ の長さ L_{2m} を α と m を用いて表せ。

- (4) $\sum_{k=1}^n L_k$ を求めよ。