

[I] 次の問に答えよ。

(1) $y = x - 4$ と $\log_4(16y^2) + \log_2 x = 2$ とを同時に満たす x, y の値をすべて求めよ。

(2) 複素数平面上で複素数 z が単位円周 $|z|=1$ 上を1周するとき3点 $z, \frac{1}{z}, z + \frac{1}{z}$ がつくる三角形の面積 $S(z)$ の最大値を求めよ。

ただし3点が一直線上にあるとき、あるいは2点が重なるときは $S(z)=0$ とする。

(3) x の3次式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) が次の条件 (i), (ii) を同時に満たすような a の範囲を求めよ。

(i) $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=0$

(ii) $f(x)=0$ の解は $0 < x < 2$ の範囲には存在しない。

(50点)

〔Ⅱ〕 曲線 $C: y = e^{-x} \cos x$ ($x \geq 0$) が x 軸と交わる点を、その点の x 座標の小さいものから番号を付け $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ とし、点 A_n の x 座標を x_n とする。次に点 A_n における曲線 C の接線が y 軸と交わる点を B_n 、その y 座標を y_n とする。以下の問に答えよ。

(1) x_n と y_n を求めよ。

(2) 原点を O とし $\angle OA_n B_n = \theta_n$ ($0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$) とするとき $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \theta_n$ を求めよ。

(3) $f(x) = (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^{-x}$ とおく。導関数 $f'(x)$ が $f'(x) = e^{-x} \cos x$ となるように α, β を定めよ。

(4) 線分 $A_n A_{n+1}$ と曲線 C とで囲まれる図形の面積 S_n を求めよ。

また $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

(50点)

〔Ⅲ〕 $OA = 3$, $OB = 4$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ である三角形 AOB を考える。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) 辺 AB の長さを求めよ。
- (2) $\angle AOB$ の 2 等分線上に点 P をとる。 $\overrightarrow{OP} = m\vec{a} + n\vec{b}$ と表わすとき m を n で表わせ。
- (3) 辺 OA の中点を M , 辺 OB の中点を N とする。 M を通り辺 OA に垂直な直線と N を通り辺 OB に垂直な直線との交点を Q とする。 $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表わせ。
- (4) 線分 PQ の長さが最小となる $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表わせ。

(50点)