

$$[I] \quad 7. \frac{5}{7} \quad 1. -\frac{1}{5}$$

$$7. \frac{9}{50} \quad 2. \frac{11}{50}$$

$$[II] \quad (1) \quad \sum_{k=1}^3 a_k a_{k+1} = \frac{a_3}{4a_2} \quad \text{より}$$

$$a_3 = 4a_2(a_1 a_2 + a_2 a_3) = 4a_2^2(a_1 + a_3)$$

$$\therefore a_3 = \frac{4a_1 a_2^2}{1 - 4a_2^2} \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4} \text{ を代入して } a_3 = \frac{1}{6} \quad \dots \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\sum_{k=1}^4 a_k a_{k+1} = \frac{a_4}{4a_3} \quad \text{より}$$

$$a_4 = 4a_3(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4) = 4a_3^2 a_4 + 4a_2 a_3(a_1 + a_3)$$

$$\therefore a_4 = \frac{4a_2 a_3(a_1 + a_3)}{1 - 4a_3^2} \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{6} \text{ を代入して } a_4 = \frac{1}{8} \quad \dots \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$(2) \quad a_{n+1} = 4a_n \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} = 4a_n(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_{n+1})$$

$$\therefore (1 - 4a_n^2) a_{n+1} = 4a_n(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n) > 0$$

$$(\because a_k > 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots, n, n+1))$$

$$\therefore 1 - 4a_n^2 > 0 \quad \text{と仮定して } n \geq 2 \text{ に対して}$$

$$a_{n+1} = \frac{4a_n(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)}{1 - 4a_n^2} \quad \dots \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{2n} \quad \dots \text{④} \quad \text{を推定し、これを数学的帰納法で証明する。}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{8} \quad \text{だから ④は } n=1, 2, 3, 4 \text{ で成立。}$$

$$n = l-1, \quad l \quad (l \geq 4) \text{ のとき、④が成立すると仮定すれば}$$

$$a_{l-1} = \frac{1}{2(l-1)}, \quad a_l = \frac{1}{2l} \quad \dots \text{④}$$

$$(2) \text{の結果を使って } n = l-1 \text{ を代入すると}$$

$$a_l a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{l-2} a_{l-1} = \frac{a_l(1 - 4a_{l-1}^2)}{4a_{l-1}} \quad \dots \text{②}$$

$$(2) \text{の結果に } n = l \text{ を代入すると}$$

$$a_{l+1} = \frac{4a_l(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{l-2} a_{l-1} + a_{l-1} a_l)}{1 - 4a_l^2} \quad \dots \text{③}$$

$$\text{②を③に代入すると}$$

$$a_{l+1} = \frac{4a_l \left\{ \frac{a_l(1 - 4a_{l-1}^2)}{4a_{l-1}} + a_{l-1} a_l \right\}}{1 - 4a_l^2}$$

$$= \frac{a_l^2}{a_{l-1}(1 - 4a_l^2)}$$

$$\text{④を代入して}$$

$$a_{l+1} = \frac{\left(\frac{1}{2l}\right)^2}{\frac{1}{2(l-1)} \left\{ 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2l}\right)^2 \right\}} = \frac{l-1}{2(l^2-1)}$$

$$= \frac{1}{2(l+1)}$$

$$\text{これは } n = l+1 \text{ のときに ④が成立することを示す。}$$

$$\text{以上より すべての自然数 } n \text{ に対して ④は成立。}$$

$$\text{即ち } a_n = \frac{1}{2n} \quad (\text{証明終})$$

[III]

$$(1) \quad OA^2 = PO^2 + PA^2 - 2PO \cdot PA \cos \theta$$

$$\text{であるから}$$

$$X = \frac{PO^2 + PA^2 - OA^2}{2}$$

$$= PO \cdot PA \cos \theta \quad \dots \text{①}$$

$$= \vec{OP} \cdot \vec{AP}$$

$$\vec{OP} = (x, 1), \quad \vec{AP} = (x-1, 1) \quad \text{であるから}$$

$$X = x(x-1) + 1 = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ が最小となる } x \text{ の値は } x = \frac{1}{2} \\ \text{最小値} = \frac{3}{4} \end{array} \right. \quad \dots \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$(2) \quad \text{①より } X^2 = PO^2 \cdot PA^2 \cos^2 \theta$$

$$= (x^2 + 1) \{ (x-1)^2 + 1 \} \cos^2 \theta$$

$$= (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) \cos^2 \theta$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{X^2}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)} \quad \dots \text{②}$$

$$\therefore (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)$$

$$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \quad \text{を}$$

$$X = x^2 - x + 1 \text{ で割って商と余りを求めることにより}$$

$$(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)$$

$$= (x^2 - x + 1)^2 + 1 = X^2 + 1$$

$$\text{これを ②に代入して}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{X^2}{X^2 + 1} \quad \dots \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$(3) \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{より } \frac{X^2}{X^2 + 1} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10}$$

$$\therefore X^2 = 9, \quad X > 0 \text{ であるから } X = 3$$

$$X = x^2 - x + 1 = 3 \quad \text{より}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 2, -1 \quad \dots \left(\frac{4}{5}\right)$$

