

$$[I] \quad \text{ア. } 3 \quad \text{イ. } \frac{3}{2}$$

$$\text{ウ. } a \quad \text{エ. } 40a - 99$$

$$\text{オ. } 8 \quad \text{カ. } 12$$

[II]

$$(1) \quad x_1=1, y_1=0, \begin{cases} x_{n+1}=2x_n+y_n \\ y_{n+1}=x_n+2y_n \end{cases} \quad \text{より}$$

$$x_{n+1}+ay_{n+1}=2x_n+y_n+a(x_n+2y_n) \\ = (2+a)x_n + (2a+1)y_n \quad \dots\dots\dots ①$$

ここで $a=-2$ とすると

$x_{n+1}-2y_{n+1}=-3y_n$ となり $z_n=x_n-2y_n$ が定義される数列 $\{z_n\}$ が等比数列となることはありえないので

求める a は $a \neq -2$ が必要。

$$\text{このとき } ① \text{ より } x_{n+1}+ay_{n+1}=(a+2)\left(x_n+\frac{2a+1}{a+2}y_n\right)$$

このとき、数列 $\left\{x_n+\frac{2a+1}{a+2}y_n\right\}$ が等比数列となるための条件は

$$a=\frac{2a+1}{a+2} \Leftrightarrow a^2=1.$$

$$a \neq -2 \text{ を考慮して求める } a \text{ は } a=\pm 1 \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad a=\pm 1 \text{ を } ① \text{ に代入して } \begin{cases} x_{n+1}+y_{n+1}=3(x_n+y_n) \quad \dots\dots ② \\ x_{n+1}-y_{n+1}=x_n-y_n \quad \dots\dots ③ \end{cases}$$

②より数列 $\{x_n+y_n\}$ は初項 $x_1+y_1=1$ 、公比 3 の等比数列となるので

$$x_n+y_n=3^{n-1} \quad \dots\dots\dots ④$$

③より数列 $\{x_n-y_n\}$ は各項すべて相等しくなるので

$$x_n-y_n=x_1-y_1=1 \quad \dots\dots ⑤$$

④、⑤を連立して解いて

$$\begin{cases} x_n = \frac{3^{n-1}+1}{2} \\ y_n = \frac{3^{n-1}-1}{2} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

[III]

(1) m が奇数のとき、 $m=2l+1$ ($l \geq 1$) とおくと

$m=1+2l, 2+(2l-1), 3+(2l-2), \dots, l+(l+1)$ の l 通り。

$$\therefore l = \frac{m-1}{2} \text{ 通り}$$

m が偶数のとき、 $m=2l$ ($l \geq 2$) とおくと

$m=1+(2l-1), 2+(2l-2), 3+(2l-3), \dots, (l-1, l+1)$ の $l-1$ 通り。

$$l = \frac{m}{2} \text{ を代入して } l-1 = \frac{m}{2} - 1 = \frac{m-2}{2} \text{ 通り}$$

$$\text{以上より } \begin{cases} m \text{ が奇数のとき } \frac{m-1}{2} \text{ 通り} \\ m \text{ が偶数のとき } \frac{m-2}{2} \text{ 通り} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

(2) 3つの数を a, b, c ($a < b < c$) とするとき $c=a+b$ となる (a, b, c) の組合せを求めればよい。

(i) n が奇数のとき $n=2l+1$ ($l \geq 1$) とおける。

最大数 c が奇数のとき $c=2k+1$ ($k=1, 2, \dots, l$) とし

$(a, b)=(1, 2k), (2, 2k-1), \dots, (k, k+1)$ の k 通り。

最大数 c が偶数のとき $c=2k$ ($k=2, 3, \dots, l$) とし

$(a, b)=(1, 2k-1), (2, 2k-2), \dots, (k-1, k+1)$ の $k-1$ 通り。

よて、求める組合せは、計

$$\sum_{k=1}^l k + \sum_{k=2}^l (k-1) = \sum_{k=1}^l k + \sum_{k=1}^l (k-1) = \sum_{k=1}^l (2k-1)$$

$$= 2 \cdot \frac{l(l+1)}{2} - l = l^2$$

$$l = \frac{n-1}{2} \text{ を代入して}$$

$$\text{組み合わせ} = \frac{(n-1)^2}{4}$$

3枚のとり出し方は計 $nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通りあるので

$$\text{求める確率} = \frac{\frac{(n-1)^2}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

(ii) n が偶数のとき $n=2l$ ($l \geq 2$) とおける。

最大数 c が奇数のとき $c=2k+1$ ($k=1, 2, \dots, l-1$) とし

$(a, b)=(1, 2k), (2, 2k-1), \dots, (k, k+1)$ の k 通り。

最大数 c が偶数のとき $c=2k$ ($k=2, 3, \dots, l$) とし

$(a, b)=(1, 2k-1), (2, 2k-2), \dots, (k-1, k+1)$ の $k-1$ 通り。

よて、求める組合せは、計

$$\sum_{k=1}^{l-1} k + \sum_{k=2}^l (k-1) = \sum_{k=1}^{l-1} k + \sum_{k=1}^{l-1} k = l(l-1)$$

$$l = \frac{n}{2} \text{ を代入して } \text{組み合わせ} = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = \frac{n(n-2)}{4}$$

$$\text{求める確率} = \frac{\frac{n(n-2)}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{3}{2(n-1)}$$

以上 (i), (ii) より

$$\begin{cases} n \text{ が奇数のとき } \text{組み合わせ} = \frac{(n-1)^2}{4} \text{ 通り} \\ \text{確率} = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)} \\ n \text{ が偶数のとき } \text{組み合わせ} = \frac{n(n-2)}{4} \text{ 通り} \\ \text{確率} = \frac{3}{2(n-1)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$