

[I] ア. $10\sqrt{3}$ イ. 7
 ウ. $\frac{7}{\sqrt{3}}$ エ. $\sqrt{3}$
 オ. 504 カ. $\frac{4}{9}$
 キ. $\frac{5}{14}$

[II]

(1) $C_n = a_n + b_n$ より, $C_1 = a_1 + b_1 = 4$

$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とは同じ初項をもつので, $a_1 = b_1$

つまり, $C_1 = a_1 + a_1 = 2a_1 = 4$

よって, $a_1 = b_1 = 2$

よって

$\{a_n\}$ は等差数列なので, 公差を d とし

$$a_n = 2 + (n-1)d$$

$\{b_n\}$ は等比数列なので, 公比を r とし

$$b_n = 2 \cdot r^{n-1}$$

と表せる。

すなわち, $C_n = a_n + b_n = 2 + (n-1)d + 2 \cdot r^{n-1} \dots \textcircled{*}$

$$C_2 = 2 + (2-1)d + 2 \cdot r^{2-1} = 6$$

$$C_3 = 2 + (3-1)d + 2 \cdot r^{3-1} = 16$$

よって, $\begin{cases} d + 2r = 4 & \dots \textcircled{1} \\ d + r^2 = 7 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$

$r > 0$ であることに注意して ①②を

連立方程式として解くと,

$$r = 3, \quad d = -2$$

これを①に代入して,

$$C_n = 4 - 2n + 2 \cdot 3^{n-1} \quad (\text{答})$$

(2) $S_m = \sum_{n=1}^m C_n = \sum_{n=1}^m (4 - 2n + 2 \cdot 3^{n-1})$

$$= \sum_{n=1}^m 4 - 2 \sum_{n=1}^m n + 2 \sum_{n=1}^m 3^{n-1}$$

$$= 4m - 2 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) + 2 \cdot \frac{3^m - 1}{3 - 1}$$

$$= 4m - m(m+1) + 3^m - 1$$

$$= -m^2 + 3m + 3^m - 1$$

よって

$$S_m = -m^2 + 3m + 3^m - 1 \quad (\text{答})$$

(3) $-m^2 + 3m + 3^m - 1 \geq 2003$ を考える。

m がある程度大きくなると, 3^m の値が

他の項よりも大きくなる。

$$3^6 = 729, \quad 3^7 = 2187 \text{ となる}$$

m が 7 に見当をつけて調べてみる。

$$6^2 = 36, \quad 3 \cdot 6 = 18 \text{ より}$$

$$S_6 = -36 + 18 + 729 - 1 \text{ とはいずれも不適}$$

S_5, S_4, S_3, S_2, S_1 とはより小さい

$m^2, 3m, 3^m$ の値が小さくなる

ため, $S_m \geq 2003$ とはいない。

$$S_7 = -7^2 + 3 \cdot 7 + 3^7 - 1$$

$$= -49 + 21 + 2187 - 1$$

$$= 2158 \geq 2003$$

$$\text{よって } m = 7 \quad (\text{答})$$

[III]

(1) $f(x) = |x^2 - 5x + 4| + x + 1$

i) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ のとき

$$(x-4)(x-1) \geq 0$$

$$\text{つまり } x \geq 4, \quad x \leq 1 \text{ のとき}$$

$$f(x) = (x^2 - 5x + 4) + x + 1$$

$$= x^2 - 4x + 5$$

$$= (x-2)^2 + 1$$

ii) $x^2 - 5x + 4 < 0$ のとき

$$(x-4)(x-1) < 0$$

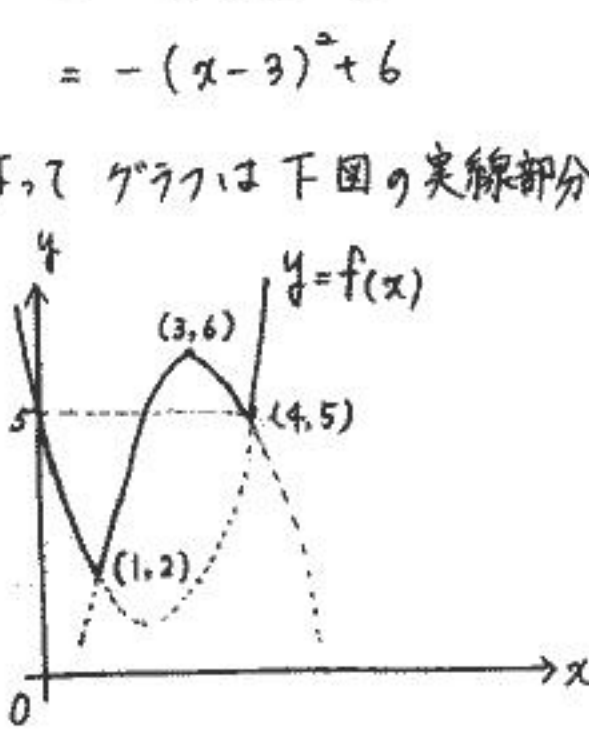
$$\text{つまり } 1 < x < 4 \text{ のとき}$$

$$f(x) = -(x^2 - 5x + 4) + x + 1$$

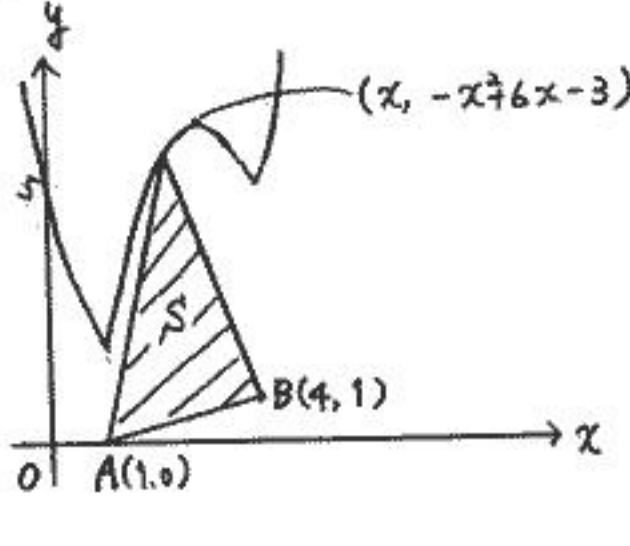
$$= -x^2 + 6x - 3$$

$$= -(x-3)^2 + 6$$

よって グラフは 下図の実線部分



(2)



x 軸方向に -1 平行移動して考える。

i) $1 < x \leq 4$ のとき

$$S = \frac{1}{2} |(x-1) - (4-1)(-x^2 + 6x - 3)|$$

$$= \frac{1}{2} |x-1 + 3x^2 - 18x + 9|$$

$$= \frac{1}{2} |3x^2 - 17x + 8|$$

$$1 \leq x \leq 4 \text{ なら } 3x^2 - 17x + 8 < 0 \text{ となる}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) (3x^2 - 17x + 8)$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - 4$$

ii) $x \leq 1$ のとき

$$S = \frac{1}{2} |(x-1) - (4-1)(x^2 - 4x + 5)|$$

$$= \frac{1}{2} |x-1 - 3x^2 + 12x - 15|$$

$$= \frac{1}{2} |-3x^2 + 13x - 16|$$

$$x \leq 1 \text{ なら } -3x^2 + 13x - 16 < 0 \text{ となる}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) (-3x^2 + 13x - 16)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8$$

よって

$$\begin{cases} x \leq 1 \text{ のとき } \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8 \\ 1 < x \leq 4 \text{ のとき } -\frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - 4 \end{cases} \dots (\text{答})$$

(3)

i) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$S = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8$$

$$= \frac{3}{2} \left(x - \frac{13}{6}\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{13}{6}\right)^2 + 8$$

$0 \leq x \leq 1$ において

S は単調減少

よって 最大値は $x=0$ のとき 8

最小値は $x=1$ のとき 3

ii) $1 \leq x \leq 4$ のとき

$$S = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - 4$$

$$= -\frac{3}{2} \left(x - \frac{17}{6}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{17}{6}\right)^2 - 4$$

$$= -\frac{3}{2} \left(x - \frac{17}{6}\right)^2 + \frac{193}{24}$$

よって 最大値は $x = \frac{17}{6}$ のとき $\frac{193}{24}$

最小値は $x=1$ のとき 3

よって i) ii) より

最大値は $x = \frac{17}{6}$ のとき $\frac{193}{24}$

最小値は $x=1$ のとき 3