

[I] 次の に適する数を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

(1) n は自然数, d は定数とする。半径 $1+nd$ の円の面積を S_n とすると,

$d =$ ア のとき, $\sum_{n=1}^{10} S_n = 285\pi$ であり, $d =$ イ

のとき, $\sum_{n=1}^4 S_n = \frac{6}{5}\pi$ である。

(2) 客 100 人に料理 A,B,C が出され, 料理を食べなかった客はいなかった。A を 25 人が, B を 49 人が, C を 58 人が食べた。また, 5 人が全種類食べ, 56 人が A か B の少なくともどちらか 1 つを食べた。客の中から任意に選んだ 1 人が A,B の両方とも食べた確率は ウ であり, ちょうど 2 種類の料理を食べた確率は エ である。

[II] 正の数でつくられた数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} = \frac{a_{n+1}}{4a_n} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

をみたすとき、次の各問に答えよ。

- (1) a_3, a_4 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ に対し、 a_{n+1} を $a_1, a_2, \dots, a_n$ で表せ。
- (3) 第 n 項 a_n の式を推定して、それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

[III] xy 平面において、直線 $y = 1$ 上を動く点 $P(t, 1)$ と x 軸上の 2 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ のつくる角 $\angle OPA$ を θ とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $X = \frac{PO^2 + PA^2 - OA^2}{2}$ とおく。 X を t で表し、 X が最小となる t の値と最小値を求めよ。

(2) $\cos^2 \theta$ を X で表せ。

(3) $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ となる t の値をすべて求めよ。