

[I] 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

- (1) 曲線 $y = \log x$ 上の点 $P(a, \log a)$ ($a > 0$) における接線の方程式は

$$y = \text{ア} x + \text{イ}$$

であり、P における法線の方程式は

$$y = \text{ウ} x + \text{エ}$$

である.

- (2) 座標空間の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 1, 3)$ に対し、内積

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \text{オ} \text{ より } \angle AOB = \text{カ} \pi \text{ である. さらに,}$$

点 $P(-5, 1, 1)$ と平面 OAB 上の点 H を通る直線 PH と平面 OAB が垂直であるとき、 H の座標は (, ,) である.

- (3) 不定積分 $I = \int \sin^5 x \, dx$ は

$$I = \text{コ} \cos x + \text{サ} \cos^3 x + \text{シ} \cos^5 x + C$$

(C は積分定数)

と表されるから、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx$ の値は である.

[II] 曲線 $C: y = x^3 - x$ 上の点 $P(a, a^3 - a)$ における接線を ℓ とする.

このとき、次の各問に答えよ. ただし, $a > 1$ とする.

- (1) P 以外の ℓ と C の交点 Q の座標を求めよ.
- (2) P, Q 以外の C 上の点 A における接線が ℓ と平行であるように A の座標を定めよ.
- (3) ℓ と C で囲まれた部分の面積を S_1 とし, 三角形 AQP の面積を S_2 とするとき, それらの比 $k = \frac{S_1}{S_2}$ を求めよ.

(50 点)

[III] 座標平面に 3 点 $A(1,2)$, $B(2,1)$, $C(4,3)$ をとる. 次の各問に
答えよ.

- (1) $\angle ABC$ を求めよ.
- (2) 線分 BC を $BP : PC = t : (1 - t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点 P の座標
を求めよ.
- (3) 3 点 A, B, C を通る円を S とする. S の方程式を求めよ.
- (4) 点 A と線分 BC 上の点 P を通る直線と円 S との交点で A 以外の点
を R とする. 三角形 ABC と三角形 ARC の共通部分の面積が $\frac{4}{3}$ で
あるとき, R の座標を求めよ.

(50 点)

[IV] $a (> 0)$ は定数とする. 関数 $f(x) = \frac{ae^{ax}}{1 + e^{ax}}$ について, 次の各問に答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めよ.
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ.
- (3) 関数 $g(x) = f(x) - \frac{a}{2}$ が奇関数であることを示せ.
- (4) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.
- (5) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

(50 点)