

〔I〕

ア. 4

ウ. $-\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3}x$

オ. $4 + 4\sqrt{3}$

キ. -16

ケ. 4

イ. $-x^2 + 4x$

エ. 2

カ. 2

ク. 25

コ. -7

〔Ⅱ〕

(1) 余弦定理より,

$$L^2 = m^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot m \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ$$

$$\therefore L = \sqrt{m^2 - 4m + 8} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(2) 正弦定理より,

$$2R = \frac{L}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore R = \sqrt{\frac{m^2 - 4m + 8}{2}} \quad \cdots \text{ (答)}$$

また, 面積を考えると,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} r (L + m + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2\sqrt{2} \sin 45^\circ \quad \cdots \text{①}$$

$$\therefore r = \frac{2m}{\sqrt{m^2 - 4m + 8} + m + 2\sqrt{2}} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(3) ①より, $S = m$

また, $T = \pi R^2$ だから,

$$\begin{aligned} T - S &= \frac{\pi}{2} (m^2 - 4m + 8) - m \\ &= \frac{\pi}{2} \left(m - \frac{2\pi + 1}{\pi} \right)^2 + \frac{4\pi^2 - 4\pi - 1}{2\pi} \end{aligned}$$

よって, $T - S$ は $m = \frac{2\pi + 1}{\pi}$ のとき

最小となり, その値は $\frac{4\pi^2 - 4\pi - 1}{2\pi} \quad \cdots \text{ (答)}$

〔Ⅲ〕

(1) (i) b が偶数のときは,

$$x_{n+1} = x_n + c$$

となるから, $x_1 > 0$ により,

$$x_n > 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

(ii) b が奇数のときは,

$$x_{n+1} = -x_n + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから,

$$x_{n+2} = -x_{n+1} + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$x_{n+2} = x_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

よって,

$$\begin{cases} x_{2m-1} = x_1 = a > 0 \\ x_{2m} = x_2 = c - a \end{cases} \quad (m=1, 2, \dots) \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。 $c \geq a$ となる (a, c) の組は 21 通りあるから,

(i), (ii) より,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{36} = \frac{19}{24} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(2) b が奇数のときは③より, $x_4 > 10$ とはならないから, b は偶数。 x_n は等差数列となり,

$$x_4 = a + 3c$$

 $x_4 \leq 10$ となってしまう (a, c) の組は,

$$\begin{cases} c=1 \text{ のとき, } a=1, \dots, 6 \\ c=2 \text{ のとき, } a=1, \dots, 4 \\ c=3 \text{ のとき, } a=1 \end{cases}$$

で 11 通りあるから, $x_4 > 10$ となる確率は,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{36-11}{36} = \frac{25}{72} \quad \cdots \text{ (答)}$$