

[I] (2次関数)

下に凸： $k > 0$ …ア 上に凹： $k < 0$ …イ

また,

$$f(x) = k\left(x - \frac{k+2}{k}\right)^2 - \frac{(k+2)^2}{k} + 3k + 2$$

$$= k\left(x - \frac{k+2}{k}\right)^2 + \frac{2(k+1)(k-2)}{k}$$

により, 頂点の座標は

$$\left(\frac{k+2}{k}, \frac{2(k+1)(k-2)}{k}\right) \quad \dots \text{ウ, エ}$$

オとカを求めるには, 頂点の y 座標の値, 軸の位置, $f(0)$ の値についての3つの条件を考えればよい。

(オ) (i) $k > 0$ のとき

$$\frac{2(k+1)(k-2)}{k} < 0 \text{ かつ } \frac{k+2}{k} > 0 \text{ かつ } 3k+2 > 0$$

(ii) $k < 0$ のとき

$$\frac{2(k+1)(k-2)}{k} > 0 \text{ かつ } \frac{k+2}{k} > 0 \text{ かつ } 3k+2 < 0$$

これをみたすのは, $0 < k < 2$ …オ

(カ) (i) $k > 0$ のとき

$$\frac{2(k+1)(k-2)}{k} < 0 \text{ かつ } \frac{k+2}{k} < 0 \text{ かつ } 3k+2 > 0$$

(ii) $k < 0$ のとき

$$\frac{2(k+1)(k-2)}{k} > 0 \text{ かつ } \frac{k+2}{k} < 0 \text{ かつ } 3k+2 < 0$$

これをみたすのは, $-1 < k < -\frac{2}{3}$ …カ

また, キを求めるには, $f(0)$ の値のみについて考えればよく,

$$k > 0 \text{ のとき } 3k+2 < 0 \quad k < 0 \text{ のとき } 3k+2 > 0$$

となるから, $-\frac{2}{3} < k < 0$ …キ

[Ⅱ] (数列)

(1)

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -a_n + a_{n-1} + 2 \quad (n=2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\text{となるから, } a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1 \quad (n=2, 3, \dots) \quad \dots \text{ (答)}$$

(2)

$$(1) \text{より, } a_n - 2 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2)$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - 2) \quad (n=2, 3, \dots)$$

$$\text{ここで, } a_1 = S_1 = -a_1 - 5 \text{ より } a_1 = -\frac{5}{2} \text{ となるから,}$$

$$a_n - 2 = -\frac{9}{2^n} \quad (n=2, 3, \dots)$$

この式は $n=1$ のときも成り立つから,

$$a_n = 2 - \frac{9}{2^n} \quad (n=1, 2, \dots) \quad \dots \text{ (答)}$$

(1)

$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{b} + x\overrightarrow{d}$ であり, F は直線 DP 上の点だから, t を実数として

$$= xt\vec{b} + (1-t+xt)\vec{d} \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AF} = s \overrightarrow{AQ}$$

$$= s\vec{b} + us\vec{d} \quad \cdots (2)$$

$$\begin{cases} xt = s \\ 1 - t + xt = ys \end{cases}$$

$$\therefore t = \frac{1}{1-x+xy}, \quad s = \frac{x}{1-x+xy}$$

よって, $\overrightarrow{\text{AF}} = \frac{x}{1-x+xy} \vec{b} + \frac{xy}{1-x+xy} \vec{d}$ となり,

$$\begin{cases} \text{FU} = \frac{xy}{1-x+xy} \\ \text{FV} = \frac{x}{1-x+xy} \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{FD} &= \sqrt{(1-\text{FU})^2 + \text{FV}^2} \\ &= \frac{\sqrt{(1-x)^2 + x^2}}{1-x+xy} \\ &= \frac{\sqrt{1-2x+2x^2}}{1-x+xy} \quad \dots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \Delta \text{FDQ} &= \Delta \text{ADQ} - \Delta \text{ADF} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{FV} \\ &= \frac{1 - 2x + xy}{2(1 - x + xy)} \quad \dots \quad (\text{答})\end{aligned}$$

