

[I]

(1)

余弦定理より, $(4-AP)^2 = AP^2 + 4 - 4AP\cos\theta$

$$\therefore AP = \frac{3}{2-\cos\theta} \quad \cdots \text{ア}$$

$\triangle BAP$ の面積 S は, $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AP \sin\theta \quad (0^\circ < \theta < 180^\circ)$

$$= \frac{3\sin\theta}{2-\cos\theta} \quad \cdots \text{イ}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{3(2\cos\theta-1)}{(2-\cos\theta)^2}$$

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ だから, } \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \cdots \text{エ}$$

のとき, つまり $\theta = 60^\circ$ のとき, S は最大値 $\sqrt{3}$ $\cdots \text{ウ}$ をとる。

(2)

$$f(x) = \int_0^x (\sin x \cos t + \cos x \sin t) dt$$

$$= \sin x \int_0^x \cos t dt + \cos x \int_0^x \sin t dt$$

$$= \sin x [\sin t]_0^x + \cos x [-\cos t]_0^x$$

$$= \sin^2 x + \cos x (1 - \cos x)$$

$$= -2\cos^2 x + \cos x + 1$$

よって, $A = -2$, $C = 1$ $\cdots \text{オ}$, カ

$$\text{また, } f(x) = -2\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

となり, $-1 \leq \cos x \leq 1$ により,

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{4} \text{ のとき, 最大値 } \frac{9}{8} & \cdots \text{キ, ク} \\ \cos x = -1 \text{ のとき, 最小値 } -2 & \cdots \text{ケ, コ} \end{cases}$$

[II]

(1)

図形は y 軸に関して対称だから、点 Q のみについて考える。

C_1 について $y' = 2x$, C_2 について $y' = 2ax$ だから、点 Q におけるこれらの接線が直交するとき、 $2c \cdot 2ac = -1 \quad \dots \textcircled{1}$

また、点 Q は C_2 上の点だから、 $c^2 = ac^2 + b \quad \dots \textcircled{2}$

①, ②より、 $a = -\frac{1}{4c^2}$, $b = c^2 + \frac{1}{4} \quad \dots$ (答)

(2)

(1)と同様、対称性により、点 Q のみ考える。

点 Q における C_1 , C_3 の接線が直交する

$\iff$ 点 Q における C_1 の接線が C_3 の中心 S を通る

$\iff y = 2c(x - c) + c^2$ が $S(0, s)$ を通る

$\iff s = -c^2 \quad \dots$ (答)

また、 $r^2 = c^2 + (c^2 - s)^2$ により、 $r = c\sqrt{1 + 4c^2} \quad \dots$ (答)

(3)

直線 QS が $\angle UQT$ を 2 等分することから、

$\angle UQS = \angle TQS \quad \dots \textcircled{3}$

また、 $US \parallel QT$ より、 $\angle USQ = \angle TQS \quad \dots \textcircled{4}$

③, ④より、 $\angle UQS = \angle USQ$ となり、 $\triangle UQS$ は二等辺三角形となるから、 $UQ = US \quad \therefore c^2 + (c^2 - d)^2 = (d - s)^2$

$s = -c^2$ より、 $c^2 = 4c^2 d$

$\therefore d = \frac{1}{4} \quad \dots$ (答)

[Ⅲ]

$$(1) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (\alpha, \beta, 1), \\ \overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD} = (\alpha - d, \beta, 1) \end{aligned}$$

と表せる。これらが直交するから、

$$\alpha(\alpha - d) + \beta^2 + 1 = 0$$

$$\therefore d = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{\alpha} \quad \dots \text{ (答)}$$

E, F については、

$$\begin{cases} \overrightarrow{EP} = (\alpha, \beta - e, 1) \\ \overrightarrow{FP} = (\alpha, \beta, 1 - f) \end{cases}$$

により、全く同様にして、

$$e = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{\beta}, \quad f = \alpha^2 + \beta^2 + 1 \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} de \right) f \\ &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^3}{6\alpha\beta} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{OP}| \text{ となるから } |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \text{ より,} \\ S &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}{2\alpha\beta} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \alpha^2 + \beta^2 = 3 \text{ のとき, } S = \frac{4^{\frac{5}{2}}}{2\alpha\beta} = \frac{16}{\alpha\beta} \text{ となるが,}$$

相加・相乗平均の関係から、

$$3 = \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \quad (\text{等号は } \alpha = \beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ のとき成立}) \text{ であるから,}$$

$$S \text{ の最小値は, } 16 \times \frac{2}{3} = \frac{32}{3} \quad \dots \text{ (答)}$$

[IV]

$$x = t^2$$

$$y = -t^3 + 4t^2 - 5t + 3 \quad (0 \leq t \leq 2)$$

(1)

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -3t^2 + 8t - 5 = -(t-1)(3t-5) \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(t-1)(3t-5)}{2t}$$

よって、増減表は右表のようになる。

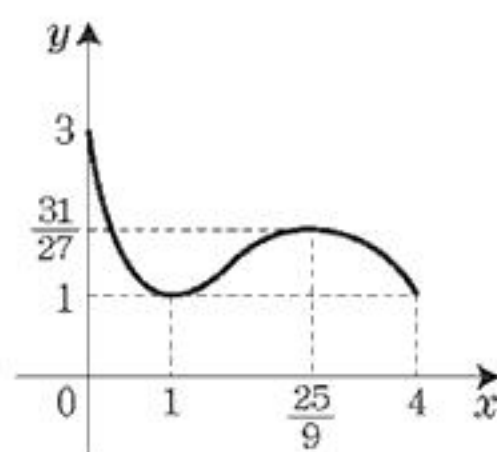
接線の傾きが0となるのは

$t=1$ のときの $(1, 1)$

$t = \frac{5}{3}$ のときの $\left(\frac{25}{9}, \frac{31}{27}\right)$... (答)

また、曲線 C の概形は右図のようになる。

t	0		1		$\frac{5}{3}$		2
$\frac{dy}{dx}$		-	0	+	0	-	$-\frac{1}{4}$
x	0		1		$\frac{25}{9}$		
y	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	



(2)

$$S = \int_0^4 y dx = \int_0^2 (-t^3 + 4t^2 - 5t + 3) 2t dt$$

$$= \int_0^2 2(-t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 3t) dt$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{5}t^5 + t^4 - \frac{5}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{68}{15} \text{ ... (答)}$$

(3)

$$V = \int_0^4 2\pi xy dx = \int_0^2 2\pi \cdot t^2 \cdot (-t^3 + 4t^2 - 5t + 3) \cdot 2t dt$$

$$= 4\pi \int_0^2 (-t^6 + 4t^5 - 5t^4 + 3t^3) dt$$

$$= 4\pi \left[-\frac{1}{7}t^7 + \frac{2}{3}t^6 - t^5 + \frac{3}{4}t^4 \right]_0^2$$

$$= \frac{368}{21}\pi \text{ ... (答)}$$