

[I]

ア. 1326

イ. 192

ウ. 78

エ. 312

オ. 48

カ. 792

キ. 704

ク. 52

ケ. 1144

コ. 44

[Ⅱ] (数列)

(1)

$$\text{漸化式は, } a_{n+1} - n - 1 = 2a_n - 2n - 2$$

$$\therefore a_{n+1} - (n+1) = 2(a_n - n) - 2$$

と変形できるから, 数列 $\langle b_n \rangle$ を $b_n = a_n - n$ で定めると

$$b_1 = 9 - 1 = 8, \quad b_{n+1} = 2b_n - 2 \quad (n=1, 2, \dots) \text{ となる。}$$

$$b_{n+1} - 2 = 2(b_n - 2) \text{ より,}$$

$$b_n - 2 = 2(b_{n-1} - 2)$$

$$= \dots$$

$$= 2^{n-1}(b_1 - 2)$$

$$= 3 \cdot 2^n \quad (n=2, 3, \dots)$$

この等式は $n=1$ のときも成り立つから,

$$b_n = 3 \cdot 2^n + 2 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^n + n + 2 \quad (n=1, 2, \dots) \quad \dots \text{ (答)}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^n a_k = 6 \sum_{k=1}^n 2^{k-1} + \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2 = 6(2^n - 1) + \frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$

$$= 3 \cdot 2^{n+1} - 6 + \frac{1}{2}n(n+5) \quad \dots \text{ (答)}$$

[Ⅲ] (三角比)

(1)

$$\begin{cases} b = \frac{1}{4}(a^2 - 2a - 3) \\ c = \frac{1}{4}(a^2 + 3) \end{cases} \quad \cdots (\text{答})$$

(2)

$c > 0$ はつねに成り立つから, $b = \frac{1}{4}(a+1)(a-3)$ より,
 $a < -1, 3 < a \quad \cdots (\text{答})$

(3)

$a > 0$ でなければならないから, $a > 3$ が必要となる。このとき,

$$\begin{cases} c - a = \frac{1}{4}(a^2 - 4a + 3) = \frac{1}{4}(a-1)(a-3) > 0 \\ c - b = \frac{1}{4}(2a+6) > 0 \end{cases}$$

となるから, 長さ c の辺が最も長くなる。

よって, $a + b > c$ となればよいが, $a + b - c = \frac{1}{2}(a-3) > 0$ により, $a > 3$ のとき三角形となり十分。

以上より, $a > 3 \quad \cdots (\text{答})$

(4)

辺 AB が最も長いから, 内角のうち最大のものは $\angle C$ であり,
 余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + (b+c)(b-c)}{2ab} \\ &= \frac{a^2 - \frac{1}{4}a(a-1)(a+3)}{2ab} = \frac{a\left(-\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}\right)}{2ab} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\therefore \angle C = 120^\circ \quad \cdots (\text{答})$