

2004年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) **解答用紙**は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

[I] 次の (1),(2) の文中の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) 平面上に定点 A, B を $AB = 2$ になるようにとる。点 P は条件 $AP + BP = 4$ をみたすように動くものとする。 $\theta = \angle BAP$ とおくとき、AP の長さを θ を用いて表せば ア となり、 $\triangle BAP$ の面積 S を θ を用いて表せば イ となる。面積 S の最大値は ウ であり、このときの $\cos \theta$ の値は エ である。ただし、3 点 A, B, P が一直線上にあるときは $S = 0$ とする。

- (2) 変数 x の関数 $f(x)$ を $f(x) = \int_0^x \sin(x+t) dt$ で定義する。このとき、 $f(x)$ は定数 A, B, C を用いて $f(x) = A \cos^2 x + B \cos x + C$ と表され、 $A = \text{オ}$, $B = 1$, $C = \text{カ}$ である。 $f(x)$ は $\cos x = \text{キ}$ のとき、最大値 ケ をとり、 $\cos x = \text{ク}$ のとき、最小値 コ をとる。
(50 点)

[II] 曲線 $C_1 : y = x^2$ と C_1 上の 2 点 $P(-c, c^2), Q(c, c^2)$ ($c > 0$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 点 P, Q を通る曲線 $C_2 : y = ax^2 + b$ ($a < 0, b > 0$) がある。2 点 P, Q のそれぞれにおいて、 C_1 の接線と C_2 の接線が直交するとき、 a, b を c を用いて表せ。
- (2) 2 点 P, Q を通り、中心が $S(0, s)$ で半径 r の円 C_3 がある。2 点 P, Q のそれぞれにおいて、 C_1 の接線と C_3 の接線が直交するとき、 r と s を c を用いて表せ。
- (3) x 軸上に点 $T(c, 0)$ をとり、 y 軸上の点 $U(0, d)$ を、2 点 $Q(c, c^2), S(0, s)$ を通る直線が $\angle UQT$ を 2 等分するようにとる。 d の値を求めよ。

(50 点)

[III] 点 O を原点とする xyz 空間に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。 α, β を正の実数として $\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c}$ となる点 P をとる。点 P を通り, $\overrightarrow{OP}$ と垂直に交わる平面を H とする。また, 平面 H と x, y, z 軸との交点をそれぞれ D, E, F とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{DP}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交することを用いて点 $D(d, 0, 0)$ の x 座標 d を α, β を用いて表せ。また, 同様にして, 点 $E(0, e, 0)$ の y 座標 e および点 $F(0, 0, f)$ の z 座標 f を α, β を用いて表せ。
- (2) 四面体 $ODEF$ の体積 V を α, β を用いて表せ。
- (3) $\triangle DEF$ の面積 S を α, β を用いて表せ。
- (4) α, β が $\alpha^2 + \beta^2 = 3$ をみたすとき, 面積 S の最小値を求めよ。

(50 点)

[IV] 媒介変数 t を用いて $x = t^2$, $y = -t^3 + 4t^2 - 5t + 3$ ($0 \leq t \leq 2$) で表される xy 平面上の曲線 C について, 次の問いに答えよ。

- (1) 接線の傾きが 0 となる曲線 C 上の点の座標を求めよ。また, 曲線 C の概形を描け。
- (2) 曲線 C と x 軸, y 軸および直線 $x = 4$ で囲まれた図形を D とする。 D の面積 S を求めよ。
- (3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(50 点)