

[I]

ア

2

イ

-30

ウ

$2m-13$

エ

$m^2-14m+10$

オ

7

カ

-39

キ

14

ク

$\frac{n(n-19)(2n-1)}{6}$

ケ

25

コ

1225

〔Ⅱ〕

(1) 引かれたカードの数の和が3の倍数のときは

$(1, 2, 3), (1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3), (4, 4, 4)$

これが起こる確率は

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 C_2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 + 1 C_3}{10 C_3} = \frac{41}{120} \dots\dots(\text{答})$$

(2) (i) 余りが1となるのは、

$(1, 2, 4), (1, 3, 3), (2, 2, 3), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$

(i) と同様に確率を計算すると

$$\frac{38}{120}$$

(ii) 余りが2となるのは、余事象より

$$1 - \frac{41}{120} - \frac{38}{120} = \frac{41}{120}$$

よって、求める期待値は

$$0 \times \frac{41}{120} + 1 \times \frac{38}{120} + 2 \times \frac{41}{120} = 1 \dots\dots(\frac{11}{3})$$

〔Ⅲ〕

$$(1) \frac{f(p)+f(q)+f(r)}{3} - f\left(\frac{p+q+r}{3}\right)$$

$$= \frac{p^2+q^2+r^2}{3} - \left(\frac{p+q+r}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9} \{ (p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2 \} \geq 0$$

(等号成立は $p=q=r$ のとき)

$$\text{ゆえに } f\left(\frac{p+q+r}{3}\right) \leq \frac{f(p)+f(q)+f(r)}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) (1-x)f(p) + xf(q) - f((1-x)p + xq)$$

$$= (1-x)(p^2+ap+b) + x(q^2+aq+b)$$

$$- \left\{ \{(1-x)^2 + p + xq\}^2 \right.$$

$$\left. + a\{(1-x)p + xq\} + b \right\}$$

$$= x(1-x)(p-q)^2 \geq 0 \quad (\because 0 \leq x \leq 1)$$

(等号成立は $x=0$ または $x=1$ または $p=q$)

$$\text{ゆえに } f((1-x)p + xq) \leq (1-x)f(p) + xf(q) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $g(x)$ は (2) より

$$g(x) = x(1-x)(p-q)^2$$

$$= \left\{ -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\} (p-q)^2$$

よって、 $x = \frac{1}{2}$ のとき

最大値 $\frac{(p-q)^2}{4}$ をとる。…… (答)