

$$I \text{ (1) } 7. \quad ab\pi$$

$$[2] \text{ 1. } 2ab \quad \text{2. } \frac{\sqrt{2}}{2} a \quad \text{3. } \frac{\sqrt{2}}{2} b$$

$$[3] \text{ 4. } 4\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{5. } \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{6. } \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$[4] \text{ 7. } \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi a^2 b \quad \text{8. } \frac{\sqrt{6}}{3} a \quad \text{9. } \frac{\sqrt{3}}{3} b$$

$$\text{II (1)} \quad \frac{dx}{dt} = 1 + \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t \quad \text{より}$$

$0 < t < \pi$ において

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} \quad (\text{答})$$

[2] 長さ s は

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2 \frac{t}{2}} dt$$

$$= \int_0^{\pi} |2\cos \frac{t}{2}| dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2\cos \frac{t}{2} dt = \left[4\sin \frac{t}{2} \right]_0^{\pi} = \underline{4} \quad (\text{答})$$

[3] $0 \leq t \leq \pi$ の範囲では $\frac{dx}{dt} \geq 0, \frac{dy}{dt} \geq 0$

より, t の増加とともに x, y は単調増加する。

また, $y=0$ となるのは $x=0$ のときである。

また, $x=\pi$ のとき, $t=\pi$ より

$$s = \int_0^{\pi} y dx = \int_0^{\pi} y (1 + \cos t) dt$$

$$= \int_0^{\pi} (1 - \cos t)(1 + \cos t) dt$$

$$= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = \underline{\frac{1}{2} \pi} \quad (\text{答})$$

$$\text{III } x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{d} = -x\vec{a} - y\vec{b} - z\vec{c}$$

$|\vec{d}| = 16$ であり, 2つのベクトルのなす角を θ とすると,

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= x^2|\vec{a}|^2 + y^2|\vec{b}|^2 + z^2|\vec{c}|^2 + 2xy|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &\quad + 2yz|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta + 2zx|\vec{c}||\vec{a}|\cos\theta \\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy\cos\theta + 12yz\cos\theta + 6zx\cos\theta = 16 \dots\dots ① \end{aligned}$$

同様に $\vec{a} \cdot \vec{d}$, $\vec{b} \cdot \vec{d}$, $\vec{c} \cdot \vec{d}$ を求めると,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{d} &= -x|\vec{a}|^2 - y|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta - z|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta \\ &= -x - 2y\cos\theta - 3z\cos\theta = 4\cos\theta \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = -4y - 2x\cos\theta - 6z\cos\theta = 8\cos\theta \dots\dots ③$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = -9z - 3x\cos\theta - 6y\cos\theta = 12\cos\theta \dots\dots ④$$

②×2 - ③ より

$$-2x - 4y\cos\theta + 4y + 2x\cos\theta = 0$$

$$x(\cos\theta - 1) - 2y(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore x = 2y \dots\dots ⑤$$

②×3 - ④ より

$$-3x - 9z\cos\theta + 9z + 3x\cos\theta = 0$$

$$x(\cos\theta - 1) - 3z(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore x = 3z \dots\dots ⑥$$

⑤を②に代入すると

$$-x - x\cos\theta - x\cos\theta = 4\cos\theta$$

$x \neq -2$ のとき

$$\cos\theta = \frac{-x}{2x+4} \dots\dots ⑦$$

$x = -2$ のときは不適

⑤⑥⑦を①に代入して

$$x^2 + x^2 + x^2 + 6x \times \left(\frac{-x}{2x+4} \right) = 16$$

$$3x^2(2x+4) - 6x^2 = 16(2x+4)$$

$$12x^2 - 32x - 64 = 0$$

$$\therefore 3x^2 - 8x - 16 = 0 \quad x = -\frac{4}{3}, 4$$

$x = -\frac{4}{3}$ のとき

$$\cos\theta = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{8}{3}+4} = \frac{4}{12-8} = 1$$

このとき, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が平行になるので不適。

$x = 4$ のとき ⑤⑥より $y = 2, z = \frac{4}{3}$ となり,

$$\cos\theta = \frac{-4}{8+4} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \text{ より}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{2}{3}$$

以上より $x = 4, y = 2, z = \frac{4}{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{2}{3}$ (答)

IV (1) $\frac{dy}{dx} = a^x \log a$ より l の方程式は.

$$y = a^t \log a (x - t) + a^t$$

$$\therefore y = a^t \log a \cdot x + (1 - t \log a) a^t \quad (\text{答})$$

また, l の y 切片が $b(t)$ なので,

$$b(t) = (1 - t \log a) a^t \quad \text{である.}$$

$$\begin{aligned} b'(t) &= -\log a \cdot a^t + (1 - t \log a) a^t \log a \\ &= -t a^t (\log a)^2 \end{aligned}$$

よって $b'(t) = 0$ となる点では $t = 0$ であり,

$t < 0$ において $b'(t) > 0$

$t > 0$ において $b'(t) < 0$ より

$t = 1$ のとき $b(t)$ は最小となる。 ($\because 0 \leq t \leq 1$)

$$\therefore \text{最小値 } b(1) = a(1 - \log a) \quad (\text{答})$$

(2) 接線 l は, $x = 0$ のとき $y = a^t - t \log a \cdot a^t$
 $x = 1$ のとき $y = a^t \log a + a^t - t \log a \cdot a^t$

よって, 求める面積 $S(t)$ は,

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \times 1 \times (a^t - t \log a \cdot a^t + a^t \log a + a^t - t \log a \cdot a^t) \\ &= \frac{1}{2} (2a^t - 2t a^t \log a + a^t \log a) \end{aligned}$$

$$\therefore S(t) = \frac{a^t}{2} (2 - 2t \log a + \log a) \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} [3] \quad S'(t) &= \frac{a^t}{2} \log a (2 - 2t \log a + \log a) + \frac{a^t}{2} (-2 \log a) \\ &= \frac{a^t}{2} (\log a)^2 (1 - 2t) \end{aligned}$$

$S'(t) = 0$ となるのは, $t = \frac{1}{2}$ のときで, 増減表は

右図のようになる。

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$S'(t)$		+	-
$S(t)$		$\nearrow$	$\searrow$

よって, $S(t)$ の最大値は, $t = \frac{1}{2}$ のときで,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} (2 - \log a + \log a) = \sqrt{a} \quad (\text{答})$$

(4) $S(t)$ の最小値は, $t = 0$ または $t = 1$ のときで,

$$S(0) = \frac{1}{2} a^0 (2 + \log a) = \frac{1}{2} (2 + \log a)$$

$$\begin{aligned} S(1) &= \frac{1}{2} a (2 - 2 \log a + \log a) \\ &= \frac{1}{2} a (2 - \log a) \end{aligned}$$

大小を比べる為, $S(1) - S(0) = g(a)$ とおくと,

$$g(a) = a - \frac{a}{2} \log a - 1 - \frac{1}{2} \log a$$

$$\begin{aligned} g'(a) &= 1 - \frac{\log a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\log a}{2} - \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

$1 < a < 2$ より

$$g'(1) = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} = 0$$

$$g''(a) = -\frac{1}{2a} - \frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{a+1}{a^2} < 0$$

$g'(a)$ はこの範囲で 0 より減少するので $g'(a) < 0$

よって増減表は

右図のようになる。

a	1	2
$g'(a)$	0	-
$g(a)$		$\searrow$

$g(a)$ は $1 < a < 2$ において単調減少関数である。

更に, $g(1) = 1 - 0 - 1 - 0 = 0$ より

この範囲で $g(a) = S(1) - S(0) < 0$

よって $S(1) < S(0)$ となる。

よって, $S(t)$ の最小値は, $t = 1$ のときで,

$$S(1) = \frac{1}{2} a (2 - \log a) \quad (\text{答})$$