

〔I〕 (1) ア. 3 イ. 2 ウ. $4 \cdot 2^{n-1}$ エ. $4 \cdot 2^{n-1} - 3$
 オ. 4 カ. $2^{n+2} - 3n - 4$ キ. 9

(2) ク. $\frac{2}{3}$ ケ. $\frac{1}{6}$ コ. $-6 < b \leq -5$

$$〔Ⅱ〕 \quad (1) \quad \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(2) \quad \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$(3) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

(2)より

$$\begin{aligned} (\vec{c} - \vec{g}) \cdot \vec{a} &= \left\{ \vec{c} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right\} \cdot \vec{a} \\ &= \vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} (\vec{c} - \vec{g}) \cdot \vec{b} &= \left\{ \vec{c} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right\} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{c} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad |\overrightarrow{GC}|^2 &= |\vec{c} - \vec{g}|^2 \\ &= \left\{ \vec{c} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right\} \cdot \left\{ \vec{c} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right\} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって

$$GC = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(5) \quad V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

〔Ⅲ〕 (1) $y = x^2 + ax + b$ で表される放物線の頂点の座標は

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$$

なので、これと題意より

$$a = -2t - 4$$

$$b = t^2 + t + 2$$

(2) C_1 と C_2 の 2 つの異なる共有点の x 座標は、2 次方程式

$$-x^2 = x^2 + ax + b$$

の解だから、この 2 次方程式の判別式を D として、 $D > 0$ となることが必要。したがって

$$D = a^2 - 8b$$

$$= (-2t - 4)^2 - 8(t^2 + t + 2)$$

$$= -4t(t - 2) > 0$$

よって

$$t(t - 2) < 0 \iff 0 < t < 2$$

(3) $\frac{1}{3}(q - p)^3$

(4) 2 つの共有点の x 座標は

$$x = \frac{t + 2 \pm \sqrt{-t^2 - 2t}}{2}$$

なので、(3)より

$$S = \frac{1}{3}(-t^2 + 2t)^{\frac{3}{2}}$$

また $-t^2 + 2t = -\{(t - 1)^2 - 1\}$ より $t = 1$ で最大値

$$S_{\max} = \frac{1}{3}$$